Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s4journaldemat05liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

ΑΜΙΟ ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

QUATRIÈME SÉRIE.

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

G. HALPHEN, M. LEVY, A. MANNHEIM, E. PICARD, H. POINCARE, H. RESAL.

TOME CINQUIÈME. — ANNÉE 1889.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1889

(Tous droits réservés.)

25469
14/12/92

ÁN
TOC
PÁG.
E.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur la multiplication complexe dans les fonctions elliptiques et, en particulier, sur la multiplication par $\sqrt{-23}$;

PAR M. G.-H. HALPHEN.

PRÉAMBULE.

Une des belles découvertes d'Abel, tout juste indiquée dans ses Œuvres, la *multiplication complexe des fonctions elliptiques*, a été, avec éclat, tirée de l'oubli par M. Kronecker et par M. Hermite. Dès le premier travail publié sur ce sujet par M. Kronecker (*Monatsberichte*, 1857), on voit apparaître, entre cette théorie et celle des *formes* arithmétiques, des liens si étroits que l'admirable création de Gauss semble imaginée tout exprès. Cette liaison ne se montre pas moins dans le Mémoire composé par M. Hermite à la même époque (*Comptes rendus* de 1859). La multiplication complexe n'y est pas le but : c'est le moyen que M. Hermite emploie pour trouver, dans les transformations du septième et du onzième ordre, la *réduite* de Gal-

lois. C'est dans ce Mémoire cependant, si riche en résultats nouveaux, qu'on voit, après les exemples élémentaires, la première collection de fonctions à multiplication complexe, calculées numériquement avec une élégance extrême. A la même époque, le R. P. Joubert (*Comptes rendus* de 1860) et M. Kronecker (*Monatsberichte* de 1862), dont les travaux, sur ce sujet, n'ont cessé de se poursuivre, ont donné aussi beaucoup d'autres exemples. Enfin, dans ces deux dernières années, la multiplication complexe a été l'objet de Mémoires importants, dus à M. Stuart (*Quarterly Journal*, XX), M. Sylow (ce Journal, 1887), M. Weber (*Acta mathematica*), M. Pyck (*Math. Annalen*) et enfin M. Greenhill (*Proc. of London Math. Soc.*, 1888). Je n'ai point à analyser ici ces Mémoires pleins d'intérêt au point de vue, soit de la théorie générale, soit des résultats numériques. Sous ce dernier point de vue, le Mémoire de M. Greenhill, tout récent, résume et dépasse les travaux antérieurs.

Pour la recherche effective des fonctions à multiplication complexe, sauf en quelques cas, comme la multiplication par $\sqrt{-7}$ ou par $\sqrt{-15}$ (Hermite, *Équations modulaires*, p. 55), on a employé, jusqu'à présent, des moyens détournés, quoique d'un grand intérêt : tantôt on utilise les équations modulaires déjà connues, tantôt on calcule, à l'aide des séries de Jacobi, les coefficients d'une équation résolvante. Ce dernier moyen, extrêmement curieux cependant, est bien étranger à l'Algèbre et surtout exige des opérations bien laborieuses. Le premier moyen conduit, en général, à des équations qu'il faut décomposer en plusieurs autres [1] ou bien qui ne donnent pas aisément, sous leur forme définitive, toutes les inconnues.

D'ailleurs, quoique l'on veuille penser de ces critiques, il était intéressant de chercher des moyens directs. Je me propose, dans le Mé-

---

[1] La cause de cette décomposition sera expliquée ici parmi les *Principes généraux*. Il y a plusieurs exemples, dignes de remarque, où cette décomposition est évitée par l'emploi d'équations modulaires irrationnelles; on le verra dans le Mémoire de M. Greenhill. Mais c'est là un accident heureux, qui se produit seulement en des cas dont le nombre est très limité. Pour obtenir une équation sans facteurs étrangers, M. Kronecker a indiqué une méthode générale, fondée sur l'emploi simultané de l'équation modulaire et de l'*équation au multiplicateur*.

moire actuel, de montrer, sur un exemple, l'emploi d'un tel moyen, si direct et si simple, en théorie du moins, qu'il suffira, pour me suivre jusqu'au bout, de posséder les premiers éléments des fonctions elliptiques. Afin de faciliter cette tâche, j'ai placé au début un exposé rapide des principes généraux de la multiplication complexe, ressemblant beaucoup à celui qu'a déjà fait M. Sylow.

L'exemple choisi est celui de la multiplication par $\sqrt{-23}$. Il existe six fonctions admettant cette multiplication. Pour le nombre 23, comme pour tous ceux qui sont de la forme $8n-1$, ce qu'on a obtenu, jusqu'à présent, ne suffit point. Dans son beau travail de 1860, le R. P. Joubert, parmi beaucoup d'autres résultats, a donné explicitement deux équations, du troisième degré, dont chaque racine est égale, pour l'une des six fonctions, au produit du module par son complémentaire. Il resterait à trouver effectivement les modules qui doivent contenir seulement une seule irrationnelle, outre $\sqrt{-23}$. Cette circonstance indique suffisamment que l'on n'a pas choisi l'inconnue la mieux appropriée. La même observation s'applique à l'équation, d'ailleurs très élégante, donnée pour le même objet par M. Greenhill. On pourrait d'abord être surpris de me voir exiger le module lui-même, quand on sait fort bien que le produit du module et de son complément définit explicitement les invariants. Il est vrai que le résultat obtenu par le R. P. Joubert suffit à définir ces invariants; mais il ne suffit point pour faire connaître, sans nouvelle irrationnelle, la formule même de multiplication.

Au point de vue des résultats, c'est donc un complément que j'apporte à ce qui était acquis. Mais c'est surtout par la méthode employée que ce travail, sans prétention, mérite peut-être un instant d'attention.

Principes généraux.

Rappelons tout d'abord les principes.

Soit ε une constante qu'on désignera sous le nom de *multiplicateur*.

Soit u un argument variable, soit encore v le produit de u par le multiplicateur,

$$v = \varepsilon u.$$

On sait que, si ε est un nombre entier, $\wp v$ est une fonction rationnelle de $\wp u$. Le même fait peut-il se présenter pour d'autres valeurs de ε?

Soient 2ω et $2\omega'$ les périodes. Comme $\wp u$ ne change point quand on ajoute ces périodes à l'argument u et que tout autre changement de l'argument, sauf le changement du signe, altère la fonction $\wp$, comme aussi $\wp v$ doit avoir une seule valeur pour chaque valeur de $\wp u$, il faut que les produits de ε par 2ω et $2\omega'$ soient eux-mêmes des périodes, qu'on ait donc

$$(1) \qquad \varepsilon\omega = p\omega + q\omega', \qquad \varepsilon\omega' = r\omega + s\omega',$$

p, q, r, s étant des nombres entiers. De là se conclut

$$(2) \qquad (p\omega + q\omega')\omega' = (r\omega + s\omega')\omega.$$

Mettons de côté le cas où l'on supposerait

$$q = 0, \qquad r = 0, \qquad p = r = \varepsilon,$$

qui est celui de la multiplication ordinaire, ε étant alors un nombre entier. Pour tout autre cas, la relation (2) n'est pas identique. Elle exprime une condition entre les périodes : *pour qu'il existe une multiplication, autre que la multiplication ordinaire, il faut et il suffit que le rapport des périodes soit racine d'une équation du second degré à coefficients entiers.* C'est une condition nécessaire, on vient de le voir; suffisante aussi : pour s'en convaincre, il suffit d'observer que, ε étant choisi conformément aux égalités (1), concordantes d'après la relation (2) supposée, $\wp v$ n'a effectivement qu'une seule valeur quand $\wp u$ est donné.

Il s'agit de trouver l'expression de $\wp v$, en fonction de $\wp u$. Cherchons donc les pôles de cette fonction, considérée comme dépendant de u.

Des égalités (1) et (2), on peut tirer

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\omega}{\varepsilon} = \dfrac{s\omega - q\omega'}{N}, \qquad \dfrac{\omega'}{\varepsilon} = \dfrac{p\omega' - r\omega}{N}, \\ \qquad N = ps - qr. \end{array} \right.$$

En conséquence, les valeurs de $u = \frac{v}{\varepsilon}$, qui rendent v égal à une période, sont des $N^{\text{ièmes}}$ parties de période. Mais il faut préciser davantage.

On doit admettre que les quatre nombres p, q, r, s n'aient aucun diviseur commun. Effectivement, de ce cas particulier, on s'élève au cas général en multipliant ε par un nombre entier, c'est-à-dire en faisant suivre la multiplication par ε d'une multiplication ordinaire. Cette dernière ferait disparaître la simplicité qu'on va reconnaître dans la nature des pôles de $\wp v$; la simplicité tient essentiellement à cette hypothèse permise et nécessaire : *p, q, r, s n'ont aucun diviseur commun.*

Soient ν le plus grand commun diviseur de s et de q; μ celui de p et de r. Ces diviseurs appartiennent aussi à N. On aura

$$q = \nu q_1, \qquad s = \nu s_1; \qquad p = \mu p_1, \qquad r = \mu r_1,$$
$$p_1 s_1 - q_1 r_1 = n, \qquad N = n\mu\nu.$$

Sont premiers entre eux les nombres q_1 et s_1, de même p_1 et r_1, et aussi μ et ν, suivant l'hypothèse qu'on vient de faire sur l'ensemble des quatre nombres p, q, r, s.

Comme q_1 et s_1 sont premiers entre eux, on peut trouver deux entiers α et β par la condition

$$(1) \qquad s_1\beta - q_1\alpha = 1.$$

Posant alors

$$s_1\omega - q_1\omega' = \omega_1, \qquad \alpha\omega - \beta\omega' = \omega'_1,$$

on en conclura

$$\omega = \beta\omega_1 - q_1\omega'_1, \qquad \omega' = \alpha\omega_1 - s_1\omega'_1,$$
$$p_1\omega' - r_1\omega = (p_1\alpha - r_1\beta)\omega_1 - (p_1 s_1 - q_1 r_1)\omega'_1,$$

égalité que nous écrirons sous la forme

$$p_1\omega' - r_1\omega = h\omega_1 - n\omega'_1,$$

en posant

$$(5) \qquad h = p_1\alpha - r_1\beta.$$

Remarquons immédiatement que h et n sont premiers entre eux. On a, en effet,

$$hs_1 = p_1 s_1 \alpha - r_1 s_1 \beta = p_1 s_1 \alpha - r_1(1 + q_1\alpha) = n\alpha - r_1,$$
$$hq_1 = p_1 q_1 \alpha - r_1 q_1 \beta = p_1(s_1\beta - 1) - r_1 q_1 \beta = n\beta - p_1.$$

Tout diviseur commun à h et n diviserait donc r_1 et p_1, qui sont premiers entre eux.

Puisque h et n sont effectivement premiers entre eux, on peut choisir un entier λ, de telle sorte que $h + \lambda n$ soit premier avec un nombre donné quelconque, par exemple ν. Mais, par l'égalité (4), α et β sont déterminés seulement à un multiple près, respectivement de s_1 et de q_1. L'égalité (5) détermine donc h à un multiple près de

$$n = p_1 s_1 - r_1 q_1;$$

on peut alors choisir ce multiple de telle sorte que h soit premier avec ν. Admettons qu'il en soit ainsi.

Les deux nombres h et μ étant premiers avec ν, on peut déterminer des entiers γ et δ par la condition

$$\nu\delta - h\mu\gamma = 1.$$

Ceci fait, on a

$$h\omega_1 - n\omega_1' + n\nu\delta\omega_1' = h(\omega_1 + n\mu\gamma\omega_1')$$

et, si l'on pose

$$\omega_1 + n\mu\gamma\omega_1' = \tilde{\omega},$$

les expressions (3) de $\frac{\omega}{\varepsilon}$ et de $\frac{\omega'}{\varepsilon}$ prennent les formes ci-après

$$\frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{s_1\omega - q_1\omega'}{n\mu} = \frac{\omega_1}{n\mu} = \frac{\tilde{\omega}}{n\mu} - \gamma\omega_1',$$
$$\frac{\omega'}{\varepsilon} = \frac{p_1\omega' - r_1\omega}{n\nu} = \frac{h\omega_1 - n\omega_1'}{n\nu} = \frac{h\tilde{\omega}}{n\nu} - \delta\omega_1'.$$

Par conséquent, en négligeant les multiples de la période $2\omega'_1$,

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{2\omega}{\varepsilon} \equiv \dfrac{2\tilde{\omega}}{n\mu} = \dfrac{2\nu\tilde{\omega}}{N}, \\[2ex] \dfrac{2\omega'}{\varepsilon} \equiv \dfrac{2h\tilde{\omega}}{n\nu} = \dfrac{2\mu h\tilde{\omega}}{N}. \end{cases}$$

Ainsi $\frac{2\omega}{\varepsilon}$ et $\frac{2\omega'}{\varepsilon}$, à des périodes près, sont des multiples d'une seule et même quanté $\frac{2\tilde{\omega}}{N}$. Avec des entiers quelconques α' et β', en posant

$$\nu\alpha' + \mu h\beta' = m,$$

on aura, de même,

$$(7)\qquad \frac{2\alpha'\omega + 2\beta'\omega'}{\varepsilon} = \frac{2m\tilde{\omega}}{N},$$

c'est-à-dire un multiple de $\frac{2\tilde{\omega}}{N}$. Comme, d'ailleurs, ν et μh sont premiers entre eux, m peut être un entier quelconque. En conséquence, *les valeurs de u qui rendent v égal à une période sont représentées par tous les multiples d'une seule et même quantité $\frac{2\tilde{\omega}}{N}$, qui est la* $N^{\text{ième}}$ *partie d'une période.*

Il est très important de se rappeler l'hypothèse : p, q, r, s sans diviseur commun. Dans le cas opposé, en effet, la proposition serait en défaut. Au cas de la multiplication ordinaire, par un entier M, les valeurs de u, qui rendent $\frac{u}{M}$ égal à une période, sont constituées par l'ensemble de *toutes* les $M^{\text{ièmes}}$ parties de période, et ces dernières ne sont pas les multiples d'une seule et même quantité. Si donc on multiplie ε par un entier M, la proposition précédente disparaît à l'égard du produit $M\varepsilon$. Elle constitue ainsi une propriété caractéristique de la multiplication singulière, réduite à ses éléments essentiels.

Connaissant les pôles de $\wp v$, fonction de u, il est aisé de trouver l'expression de $\wp v$, décomposée en éléments simples. Soit effectivement

$$u = \frac{2m\tilde{\omega}}{N} + u';$$

d'après l'égalité (7), il vient

$$v = \varepsilon u = 2\alpha'\omega + 2\beta'\omega' + \varepsilon u' \equiv \varepsilon u'.$$

D'autre part, $\mathrm{p}v$ développé suivant les puissances ascendantes de v fournit, à la partie fractionnaire, le seul terme $\frac{1}{v^2}$. Suivant les puissances ascendantes de u', on a donc le seul terme $\frac{1}{\varepsilon^2 u'^2}$. De là vient, dans la formule de décomposition, le seul terme

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathrm{p}\left(u - \frac{2m\tilde{\omega}}{N}\right).$$

Si l'on observe ensuite que $\mathrm{p}v$ est une fonction paire de u, on trouve immédiatement le terme constant, qui restait à déterminer dans la formule de décomposition, et l'on a enfin

$$(8) \qquad \varepsilon^2\,\mathrm{p}v = \mathrm{p}u + \sum_{m=1}^{m=N-1}\left[\mathrm{p}\left(u - \frac{2m\tilde{\omega}}{N}\right) - \mathrm{p}\,\frac{2m\tilde{\omega}}{N}\right].$$

Le rapport des périodes est supposé racine d'une équation du second degré, à coefficients entiers; soit

$$(9) \qquad a\omega'^2 + 2b\omega\omega' + c\omega^2 = 0$$

cette équation, où a, b, c sont des nombres entiers, n'ayant aucun diviseur commun. Le premier membre constitue ce qu'on nomme, dans la théorie de Gauss, une *forme primitive;* la qualification de *primitive* exprime que a, b, c n'ont point de diviseur commun.

Dans l'*ordre primitif* (c'est-à-dire dans l'ensemble des formes primitives), on distingue l'*ordre proprement primitif* et l'*ordre improprement primitif*. Le premier est celui où a et c ne sont pas, tous deux, pairs; le second est, au contraire, celui où a et c sont pairs. Cette distinction, née de l'Arithmétique, est encore fondamentale ici, comme on va le voir immédiatement.

Le rapport des périodes est essentiellement imaginaire. Ainsi l'équa-

tion (9) a ses racines imaginaires; en d'autres termes, le nombre D, qui est son déterminant changé de signe,

$$(10) \qquad D = ac - b^2 > 0,$$

est essentiellement positif. La forme (a, b, c), c'est ainsi qu'on représente abréviativement le premier membre (9), est donc une *forme définie*, nom que l'on donne aux formes dont le signe est invariable quand la variable est réelle. On pourra admettre que a et c, dont le signe est le même pour tous deux, sont positifs. La forme (a, b, c) est, en résumé, une *forme primitive* et *positive*.

Enfin, pour fixer les idées, nous définirons le rapport $\omega' : \omega$ comme étant égal à la racine dans laquelle la partie imaginaire est positive, c'est-à-dire que le coefficient de i est supposé positif. Par conséquent,

$$(11) \qquad \frac{a\omega' + b\omega}{\omega} = -\frac{c\omega + b\omega'}{\omega'} = i\sqrt{D},$$

et $\sqrt{D}$ est pris *positivement*.

L'équation (9) peut être mise, de diverses manières, sous la forme (2). Il y a donc diverses multiplications singulières pour la même fonction elliptique : parmi ces multiplications, il faut en choisir une, la plus simple, suffisante pour caractériser la singularité.

Par comparaison avec l'égalité (2), on posera

$$(12) \qquad \begin{cases} q = ka, \qquad -r = kc, \qquad p = kb + k', \\ s = -kb + k', \qquad p - s = 2kb. \end{cases}$$

Les trois nombres a, b, c n'ont point de diviseur commun; il en va donc de même des trois nombres a, $2b$, c dans le cas de l'ordre primitif. Alors k est nécessairement un nombre entier, et k' aussi par conséquent. Au contraire, pour l'ordre improprement primitif, a, $2b$ et c ont le diviseur 2. On peut donc prendre, pour k, la moitié d'un nombre entier; comme, d'ailleurs, b est impair (sans quoi a, b, c auraient le facteur 2), $2k'$ sera aussi un nombre entier, de même parité que $2k$.

Nous avons maintenant, suivant (12) et (10),

$$(13) \qquad N = ps - qr = k'^2 + k^2 D.$$

Le minimum de N, pour l'ordre proprement primitif, est donc $N = D$, répondant à $k' = 0$, $k = \pm 1$. Pour l'ordre improprement primitif, c'est $N = \frac{1}{4}(D + 1)$, répondant à $\pm k' = \pm k = \frac{1}{2}$.

L'expression (1) du multiplicateur ε, suivant (11), devient

$$(14) \qquad \varepsilon = \frac{p\omega + q\omega'}{\omega} = \frac{k(a\omega' + b\omega)}{\omega} + k' = k' + ik\sqrt{D}.$$

Ce multiplicateur est toujours imaginaire, et c'est là l'origine de la locution : *multiplication complexe*.

Adoptons naturellement, comme la plus simple, la multiplication où N est minimum ; fixons, d'ailleurs arbitrairement, les signes de k et de k', et concluons ainsi :

Dans l'ordre proprement primitif (c'est-à-dire l'un des deux nombres a et c étant impair), *le multiplicateur le plus simple* ε *et le degré* N *sont*

$$(15) \qquad \varepsilon = i\sqrt{D}, \qquad N = D;$$

dans l'ordre improprement primitif (c'est-à-dire si a et c sont pairs, tous deux), *le multiplicateur le plus simple* ε *et le degré* N *sont*

$$(16) \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{D}), \qquad N = \frac{1}{4}(D + 1).$$

Pour un même déterminant D, multiple de 4 moins 1, le degré le plus petit correspond à l'ordre improprement primitif, qui offre, par conséquent, des calculs directs beaucoup plus simples. Comme on le verra par l'exemple que nous allons calculer, on peut ensuite, par des opérations indirectes, passer à l'ordre proprement primitif.

Diverses méthodes de recherche.

Jusqu'à présent, les fonctions elliptiques à multiplication complexe, ou *fonctions singulières*, ont été caractérisées par la condition (9),

relative aux périodes. Le problème véritable est de *trouver leurs modules*, suivant l'ancien langage, ou leurs *invariants*, suivant le langage actuel. Pour résoudre ce problème, la voie naturelle est de faire disparaître les variables u, v de l'égalité (8), de façon à obtenir une relation entre des constantes, exprimables en fonction des invariants. On peut obtenir une infinité de telles relations.

Développons les deux membres (8) suivant les puissances ascendantes de u, égalons terme à terme les coefficients et nous aurons les relations dont il s'agit. Pour ce but, on invoquera le développement

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^4 + \ldots.$$

Se souvenant que l'on a $v = \varepsilon u$, on conclut

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{20}(\varepsilon^4 - 1)g_2 = \frac{1}{2}\sum \wp''\frac{2m\tilde{\omega}}{N}, \\ \frac{1}{28}(\varepsilon^6 - 1)g_3 = \frac{1}{2.3.4}\sum \wp^{\text{iv}}\frac{2m\tilde{\omega}}{N}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Il suffit, bien entendu, de prendre la première de ces équations. En exprimant que les arguments des diverses fonctions $\wp''$, dans le second membre, sont les multiples d'un même argument, que ce dernier est la $N^{\text{ième}}$ partie d'une période, on obtiendra, entre les invariants, une équation algébrique, propre à résoudre le problème.

On peut procéder autrement : prendre les deux équations, exprimer les fonctions $\wp''$ et $\wp^{\text{iv}}$ au moyen de la seule fonction $\wp$, suivant les formules

$$\wp'' = 6\wp^2 - \tfrac{1}{2}g_2,$$
$$\wp^{\text{iv}} = 12(10\wp^3 - \tfrac{3}{2}g_2\wp - g_3),$$

employer la multiplication ordinaire pour réduire ces fonctions $\wp$ au seul argument $\frac{2\tilde{\omega}}{N}$ et, sans avoir à exprimer que cet argument est une $N^{\text{ième}}$ partie de période, éliminer cette unique quantité $\wp\frac{2\tilde{\omega}}{N}$ entre les deux équations.

Il y a d'autres moyens encore. Dans le cas, notamment, où N est un nombre pair, en mettant, au lieu de u, dans l'égalité (8), une des trois demi-périodes, on obtient une relation fort utile, comme je ferai dans l'exemple que je me propose de traiter ici.

Voici le fait qui attire d'abord l'attention. Dans l'égalité (8) et celles qui s'en déduisent, les seules données qui apparaissent sont ε et N, c'est-à-dire, conformément aux expressions (15) ou (16), le déterminant D et la distinction entre les deux ordres, proprement ou improprement primitifs. Aucun autre élément de l'équation (9), c'est-à-dire de la forme (a, b, c) ne laisse de trace dans le calcul. Par conséquent, la totalité des formes, de déterminant D, donne en tout deux équations, bien distinctes entre elles, l'une pour l'ordre proprement primitif, l'autre pour l'ordre improprement primitif (quand D est multiple de 4, moins un).

Pour un déterminant donné, il y a une infinité de formes (a, b, c). Il n'y a cependant qu'un nombre limité de fonctions singulières, répondant à ces formes, puisque ces fonctions sont définies par une équation algébrique. Une infinité de formes répondent donc à une même fonction. Ceci tient simplement à ce que les périodes 2ω, $2\omega'$ ne sont pas entièrement déterminées. On peut, en effet, au moyen d'une substitution linéaire, de déterminant *unité*, changer ces périodes en d'autres, qui leur soient équivalentes.

Soient $2\tilde{\omega}'$ et $2\tilde{\omega}$ deux autres périodes :

$$(18) \qquad \tilde{\omega}' = \alpha\omega' + \beta\omega, \qquad \tilde{\omega} = \gamma\omega' + \delta\omega.$$

Pour que le couple $(2\tilde{\omega}', 2\tilde{\omega})$ puisse remplacer le couple $(2\omega', 2\omega)$, il faut que toute période s'exprime par une fonction linéaire de $2\tilde{\omega}'$ et $2\tilde{\omega}$, à coefficients entiers; ceci exige $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$. De plus, pour préciser le rapport $\omega' : \omega$, nous avons été conduits à fixer le signe de la partie imaginaire dans ce rapport. Pour que ce signe se conserve dans $\tilde{\omega}' : \tilde{\omega}$, il faut que l'on ait $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$, comme on le reconnaît par un calcul classique.

La substitution (18) fait apparaître $\tilde{\omega}' : \tilde{\omega}$ comme racine d'une nouvelle équation, analogue à l'équation (9). Le premier membre de cette nouvelle équation n'est autre que le premier membre de la précé-

dente (9), transformé par une substitution linéaire, à coefficients entiers, de déterminant égal à $+1$.

Dans la théorie de Gauss, toutes les formes (a, b, c), déduites d'une seule et même forme par de telles substitutions, forment une *classe* et elles sont dites *équivalentes*. Cette équivalence trouve ici son application naturelle : toutes ces formes correspondent à une seule et même fonction elliptique. Le nombre total des fonctions singulières qui correspondent à un même déterminant D est donc aussi celui des classes de formes primitives (proprement ou improprement), à déterminant $-D$. Si la théorie des nombres ne nous le faisait déjà connaître, nous apprendrions donc par les fonctions elliptiques que ces classes sont en nombre limité.

En restant dans les généralités, j'ai encore un mot à dire sur la méthode de calcul que j'ai indiquée tout à l'heure, pour la comparer avec la méthode classique, la méthode d'invention première, celle d'Abel, pour laquelle on emploie les *équations modulaires*.

Envisageons des fonctions elliptiques quelconques, ayant 2ω et $2\omega'$ pour périodes; puis d'autres fonctions elliptiques, ayant les périodes 2Ω, $2\Omega'$, liées aux précédentes par les relations

$$(19) \qquad \varepsilon\Omega = p\omega + q\omega, \qquad \varepsilon\Omega' = r\omega + s\omega',$$

analogues aux relations (1); p, q, r, s sont encore des nombres entiers sans diviseur commun, mais ε est une quantité tout à fait arbitraire. Les éléments de la théorie de la *transformation*, par les raisonnements mêmes que nous avons employés, montrent que $\wp(\varepsilon u)$ est fonction rationnelle de $\mathrm{P}u$ (nous désignons ici par P la seconde fonction elliptique, aux périodes 2Ω, $2\Omega'$). Cette fonction rationnelle s'exprime, en éléments simples, sous la forme

$$\varepsilon^2\wp(\varepsilon u) = \mathrm{P}u + \sum_{m=1}^{m=N-1}\left[\mathrm{P}\left(u - \frac{2m\bar{\Omega}}{N}\right) - \mathrm{P}\frac{2m\bar{\Omega}}{N}\right],$$

analogue à l'égalité (8).

Par le même moyen qui nous a fourni les relations (17), en em-

ployant des majuscules pour les invariants de P, on obtient

$$\frac{1}{20}(\varepsilon^4 g_2 - G_2) = \frac{1}{2}\sum P^{iv}\frac{2m\bar{\Omega}}{N},$$

$$\frac{1}{28}(\varepsilon^6 g_3 - G_3) = \frac{1}{2.3.4}\sum P^{iv}\frac{2m\bar{\Omega}}{N}.$$

En considérant les seconds membres comme des fonctions connues de G_2 et G_3, éliminant ε, on obtient une relation entre les invariants absolus $g_2^3 : g_3^2$ et $G_2^3 : G_3^2$ (qui remplacent les modules dans les notations modernes). Cette relation (mise sous forme entière relativement à G_2 et G_3, dont les seconds nombres sont des fonctions algébriques irrationnelles) constitue l'*équation modulaire* relative aux transformations d'ordre N.

Dans cette équation modulaire, supposons $G_2 = g_2$, $G_3 = g_3$. Nous retrouvons alors, au lieu des relations (19), les relations initiales (1), et l'équation ainsi obtenue, qui contient alors un seul module, ou plutôt un seul invariant absolu, caractérise des fonctions elliptiques singulières. Mais ε a disparu; la seule donnée qui subsiste est N. La disparition de ε nous avertit que les multiplications ne sont pas nécessairement réduites à leurs formes les plus simples (15) ou (16). Entre le déterminant D inconnu et le nombre donné N existe seulement la relation (13). On trouvera donc ainsi, à la fois, toutes les multiplications complexes qui répondent aux déterminants D, de la forme

$$D = \frac{N - k^2}{k'^2},$$

$2k$ et $2k'$ étant des entiers quelconques, qui rendent D entier et positif. L'équation obtenue de la sorte est donc décomposable en plusieurs équations distinctes.

Au point de vue théorique, cette méthode présente divers avantages. Tout d'abord elle a été la source de belles découvertes arithmétiques, comme on peut le voir dans les travaux de M. Kronecker. De plus, les équations modulaires ayant été très étudiées, on trouve par là plusieurs propriétés générales de la multiplication complexe. Mais, quand il s'agit de calculer effectivement des invariants singuliers, cor-

respondant à un déterminant donné, cette méthode ne peut être approuvée. Une bonne méthode doit fournir directement, sans facteurs étrangers, l'équation désirée. Elle ne doit point exiger le calcul préalable des équations modulaires. Celle que j'ai indiquée plus haut satisfait à ces conditions : par la conservation du multiplicateur ε dans le calcul, elle doit donner, pour chaque cas, une équation répondant uniquement à la question [1]. On ne peut pas dissimuler cependant que le calcul effectif offre des difficultés : pour qu'il ne soit pas trop laborieux, on doit assurément user d'artifice, employer, par exemple, des relations surabondantes, comme je vais le faire dans le cas particulier dont j'aborde maintenant le calcul.

Multiplication par $\frac{1}{2}(1+\sqrt{-23})$. — Recherche de la résolvante.

Je me propose de trouver les fonctions elliptiques singulières répondant à l'ordre improprement primitif, pour le déterminant 23. Je prends, à cet effet, l'une des formes correspondantes, la forme (2, 1, 12), supposant ainsi, entre les périodes, la relation

$$(20)\qquad \begin{cases} \omega'^2 + \omega\omega' + 6\omega^2 = 0, \\ \dfrac{2\omega' + \omega}{\omega} = i\sqrt{23}. \end{cases}$$

Dans la fonction elliptique correspondante, les invariants sont réels et le discriminant négatif. La demi-période réelle est ω, la demi-période purement imaginaire est $2\omega' + \omega$. Ainsi, suivant les notations usitées dans le cas des invariants réels avec discriminant négatif, on devra poser

$$\omega_2 = \omega, \qquad \omega'_2 = 2\omega + \omega;$$

[1] D'après un des plus beaux théorèmes de M. Kronecker, cette équation doit se décomposer en autant d'équations partielles qu'il y a de *genres* différents, entre lesquels se répartissent les classes de formes ayant le déterminant donné et appartenant à l'ordre considéré. Le déterminant que j'ai en vue est un nombre premier; il n'y a donc qu'un genre dans chaque ordre; partant, point de décomposition.

de là, pour les demi-périodes imaginaires conjuguées, les expressions

$$\omega_1 = \tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega'_2) = -\omega', \qquad \omega_3 = \tfrac{1}{2}(\omega_2 + \omega'_2) = \omega + \omega'.$$

Les *racines* e_α, c'est-à-dire les valeurs de pu quand u est une demi-période, sont donc composées ainsi : l'une réelle e_2, correspondant à ω_2 aussi bien qu'à ω'_2; les deux autres sont imaginaires conjuguées : dans e_1, qui correspond à ω_1, la partie imaginaire est positive.

Je conserverai explicitement les demi-périodes ω, ω', avec la notation ω'' pour leur somme, mettant, de plus, e, e', e'' pour les trois racines correspondantes [1]. La somme de ces dernières est nulle. On a donc simultanément

$$(21) \qquad \frac{e'}{e} = -\frac{1}{2} + t, \qquad \frac{e''}{e} = -\frac{1}{2} - t.$$

La lettre t désigne l'inconnue qu'on est naturellement conduit à choisir. Nous savons dès maintenant que $\frac{t}{i}$ doit être réel et positif.

D'après les égalités (12) appliquées au cas actuel, en y prenant

$$k = k' = \tfrac{1}{2},$$

des relations (1) et (2) on tire les suivantes :

$$(22) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon\omega = \omega + \omega', & \varepsilon\omega' = -6\omega, \\ \dfrac{\omega}{\varepsilon} = -\dfrac{\omega'}{6}, & \dfrac{\omega'}{\varepsilon} = \dfrac{\omega'}{6} + \omega, \\ \multicolumn{2}{c}{\varepsilon = \tfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{23}).} \end{array} \right.$$

---

[1] L'obligation de considérer, à la fois, les diverses fonctions elliptiques contraint à restreindre la variété habituelle des notations : je réserve l'emploi des indices pour caractériser les autres fonctions, qui interviendront plus loin.

La demi-période $\tilde{\omega}$ coïncide avec ω' et la formule (8) devient

$$(23)\quad \left\{ \varepsilon^2 \mathrm{p}v = \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{p}u + \mathrm{p}\left(u - \frac{\omega'}{3}\right) + \mathrm{p}\left(u + \frac{\omega'}{3}\right) \\ \quad + \mathrm{p}\left(u - \frac{2\omega'}{3}\right) + \mathrm{p}\left(u + \frac{2\omega'}{3}\right) + \mathrm{p}(u - \omega') \\ \quad - 2\mathrm{p}\frac{\omega'}{3} - 2\mathrm{p}\frac{2\omega'}{3} - e'. \end{array} \right. \right.$$

Posons, pour abréger [2],

$$(24)\qquad a = \mathrm{p}\frac{2\omega'}{3}, \qquad b = \mathrm{p}\frac{\omega'}{3},$$

remplaçons p'' par $6\mathrm{p}^2 - \frac{1}{2}g_2$, et déduisons de la première formule générale (17) cette équation

$$(25)\qquad \tfrac{1}{20}(\varepsilon^4 + 24)g_2 = 6a^2 + 6b^2 + 3e'^2.$$

Je prends, de plus, l'équation qu'on obtient en supposant, dans la relation (23), $u = \omega$, ce qui donne, suivant (22),

$$v = \varepsilon\omega = \omega + \omega';$$

par conséquent,

$$\varepsilon^2 e'' = e + e'' - e' + 2\mathrm{p}\left(\omega - \frac{\omega'}{3}\right) + 2\mathrm{p}\left(\omega - \frac{2\omega'}{3}\right) - 2a - 2b.$$

Nous poserons

$$\mathrm{A} = \tfrac{1}{4}(\varepsilon^2 e'' + e' - e - e'') = \tfrac{1}{4}(\varepsilon^2 e'' + 2e'),$$

en sorte que la dernière équation s'écrit ainsi

$$(26)\qquad 2\mathrm{A} + a + b = \mathrm{p}\left(\omega - \frac{\omega'}{3}\right) + \mathrm{p}\left(\omega - \frac{2\omega'}{3}\right).$$

---

[1] L'emploi des lettres a et b ne peut entraîner aucune confusion avec la notation générale (a, b, c) des formes quadratiques, sur laquelle nous n'aurons plus à revenir.

Par le théorème d'addition des demi-périodes, on a, suivant les notations (24),

$$\wp\left(\omega - \frac{\omega'}{3}\right) = e + \frac{(e-e')(e-e'')}{b-e},$$

$$\wp\left(\omega - \frac{2\omega'}{3}\right) = e + \frac{(e-e')(e-e'')}{a-e},$$

$$(27)\quad \wp\left(\omega - \frac{\omega'}{3}\right) + \wp\left(\omega - \frac{2\omega'}{3}\right) = 2e + \frac{(e-e')(e-e'')(a+b-2e)}{(a-e)(b-e)}.$$

Le second membre (26) étant maintenant exprimé au moyen de a et b, il ne faut plus qu'une relation entre a et b pour éliminer ces quantités des équations (25) et (26). Cette relation est immédiatement fournie par les expressions (24) de a et b

$$a = \wp\frac{2\omega'}{3} = \wp\left(\omega' - \frac{\omega'}{3}\right), \qquad b = \wp\frac{\omega'}{3}.$$

On en conclut, par le théorème d'addition des demi-périodes,

$$(28)\qquad (a-e')(b-e') = (e'-e)(e'-e''),$$

ce qui est la relation demandée. Je m'en sers immédiatement pour modifier le second membre (27) par le calcul suivant

$$(a-e)(b-e) - (a-e')(b-e') = (e'-e)(a+b-e-e').$$

Ajoutant, membre à membre, avec (28), on conclut

$$(a-e)(b-e) = (e'-e)(a+b-e-e'') = (e'-e)(a+b+e').$$

La relation (27) devient donc

$$\wp\left(\omega - \frac{\omega'}{3}\right) + \wp\left(\omega - \frac{2\omega'}{3}\right) = 2e + \frac{(e''-e)(a+b-2e)}{a+b+e'},$$

ce qui donne, pour l'équation (26), celle-ci

$$(29)\quad (2A - 2e + a + b)(a+b+e') + (e-e'')(a+b-2e) = 0.$$

L'élimination de a et b entre ces trois équations (25), (28) et (29) est évidemment très facile. On peut cependant la simplifier encore par une nouvelle transformation du second membre (26), conformément au calcul suivant :

$$\mathfrak{p}\left(\omega - \frac{\omega'}{3}\right) = \mathfrak{p}\left(\omega - \omega' + \frac{2\omega'}{3}\right) = e'' + \frac{(e''-e)(e''-e')}{a-e''},$$

$$\mathfrak{p}\left(\omega - \frac{2\omega'}{3}\right) = e + \frac{(e-e')(e-e'')}{a-e},$$

$$b = \mathfrak{p}\left(\omega' - \frac{2\omega'}{3}\right) = e' + \frac{(e'-e)(e'-e'')}{a-e'}.$$

Soit $f(a) = (a-e)(a-e')(a-e'')$. La somme des trois fractions, dans ces seconds membres, est $\frac{f'^2(a)}{f(a)} - \mathfrak{z}(a)$, où $\mathfrak{z}(a)$ désigne la *partie entière* de $\frac{f'^2(a)}{f(a)}$. Soit, pour un instant, u l'argument $\frac{2}{3}\omega'$, on a

$$f(a) = \tfrac{1}{4}\mathfrak{p}^2 u, \qquad f'(a) = \tfrac{1}{2}\mathfrak{p}''(u).$$

Pour un argument u quelconque, on a toujours

$$\frac{f'^2(a)}{f(a)} = \left(\frac{\mathfrak{p}''u}{\mathfrak{p}'u}\right)^2 = 4(2\mathfrak{p}u + \mathfrak{p}2u).$$

Pour $u = \frac{2}{3}\omega'$, $\mathfrak{p}u$ et $\mathfrak{p}2u$ sont des quantités égales, a. Ainsi

$$\frac{f'^2(a)}{f(a)} = 12a.$$

Quant à $\mathfrak{z}(a)$, partie entière de $\frac{f'^2(a)}{f(a)}$ où a est supposé quelconque, c'est $9a$. La somme des trois fractions est donc égale à $3a$. Au lieu de l'égalité (27), on peut donc encore écrire celle-ci

$$(29a) \qquad \mathfrak{p}\left(\omega - \frac{\omega'}{3}\right) + \mathfrak{p}\left(\omega - \frac{2\omega'}{3}\right) + b = 3a,$$

moyennant laquelle l'équation (26) fournit cette autre

$$(30) \qquad A = a - b,$$

que j'adjoins au système (25), (27) et (29).

Avec la notation A, j'emploie encore B et C, ainsi

$$(31)\quad \begin{cases} A = \frac{1}{4}(\varepsilon^2 e'' + 2e'), \\ B = \frac{1}{6}\left(\frac{\varepsilon^4 + 24}{20} g_2 - 3e'^2\right), \\ C = (e' - e)(e' - e'') = 3e'^2 - \frac{1}{4} g_2 = 2e'^2 + ee''. \end{cases}$$

Les équations (25) et (27) sont les suivantes :

$$a^2 + b^2 = B, \qquad (a - e')(b - e') = C.$$

Avec l'équation (30), on en tire

$$(31a)\quad \begin{cases} 2e'(a + b) = 2e'^2 + B - 2C - A^2 = B - A^2 - 2e'^2 - 2ee', \\ (a + b)^2 = 2B - A^2. \end{cases}$$

L'élimination de $(a + b)$ entre ces deux dernières conduirait à une équation du quatrième degré par rapport à l'inconnue t. Cette équation contiendrait un facteur étranger, tandis qu'en substituant $(a + b)$ et son carré dans (29), on obtient une équation du troisième degré

$$(32)\quad A(B - A^2 - 2ee'') + e'(3B - 2A^2 + 2ee'' - 2e'^2) = 0.$$

C'est l'équation que je voulais obtenir. On y devra substituer, pour A et B, leurs expressions (31), en se souvenant qu'on a

$$-\frac{1}{4} g_2 = ee' + e'e'' + e''e = e'e'' - e^2.$$

Elle devient, de la sorte, homogène et du troisième degré, en e, e', e''. Par le moyen des notations (21), on aura une équation du troisième degré en t.

Le développement de cette équation exige encore des calculs assez longs. Il convient donc d'avoir un guide et un contrôle par la connaissance préventive de quelques traits essentiels.

Remarques sur la résolvante.

La présence de ε dans A et B entraîne, pour les coefficients de l'équation, la forme complexe $\alpha + i\beta\sqrt{23}$, α et β étant des nombres en-

tiers. Or nous connaissons l'existence d'une racine t, purement imaginaire. Il est donc naturel de prévoir, pour l'équation, la forme

$$(33)\qquad i\sqrt{23}(\alpha t^3+\beta t)+\gamma t^2+\delta=0,$$

où α, β, γ, δ seront des nombres entiers. Je donnerai, dans un instant, la preuve véritable de cette propriété. Ce qui importe le plus, c'est de savoir à quelles fonctions elliptiques singulières se rapportent les autres racines t.

D'après les éléments de la théorie des formes, il y a, outre $(2, 1, 12)$, deux autres formes réduites, dans l'ordre improprement primitif, de déterminant -23. Ce sont les formes $(4, 1, 6)$ et $(4, -1, 6)$. Envisageons d'abord la première, que nous distinguerons en affectant de l'indice 1 les éléments correspondants. Il s'agit donc des fonctions elliptiques pour lesquelles on a

$$(34)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{4\omega_1'+\omega_1}{\omega_1}=i\sqrt{23}, & \\ \varepsilon\omega_1=\omega_1+2\omega_1', & \varepsilon\omega_1'=-3\omega_1, \\ \dfrac{\omega_1}{\varepsilon}=-\dfrac{1}{3}\omega_1', & \dfrac{\omega_1'}{\varepsilon}=\dfrac{\omega_1'+3\omega_1}{6}. \end{array}\right.$$

L'argument ϖ de la formule (8) est ici $\omega_1'+3\omega_1$.

On formera, comme précédemment, l'équation supplémentaire, en prenant $u=\omega_1$, ce qui donne aussi $v=\omega_1$. Les lettres a et b auront les significations suivantes :

$$a_1=\mathrm{p}_1\frac{2\omega_1'}{3},\qquad b_1=\mathrm{p}_1\left(\frac{\omega_1'}{3}+\omega_1\right).$$

Moyennant ces conventions, on voit immédiatement qu'on obtient les mêmes équations que précédemment, sauf remplacement de e, e', e'' par e_1', e_1'', e_1.

Notre équation du troisième degré a donc une racine t_1 définie par les égalités

$$(35)\qquad \frac{e_1''}{e_1'}=-\frac{1}{2}+t_1,\qquad \frac{e_1}{e_1'}=-\frac{1}{2}-t_1.$$

Cette racine est complexe et nous verrons même, ultérieurement, que l'on peut assigner, d'avance, son expression en fonction de la racine précédente t.

Semblablement, la forme $(4, -1, 6)$ donne lieu à des fonctions elliptiques caractérisées par les relations

$$(36)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{4\omega'_2 - \omega_2}{\omega_2} = i\sqrt{23}, & \\ \varepsilon\omega_2 = 2\omega'_2, & \varepsilon\omega'_2 = -3\omega_2 + \omega'_2, \\ \dfrac{\omega_2}{\varepsilon} = \dfrac{\omega_2 - 2\omega'_2}{6}, & \dfrac{\omega'_2}{\varepsilon} = \dfrac{1}{2}\omega_2. \end{array}\right.$$

L'argument ϖ est $\omega_2 - 2\omega'_2$. On obtient l'équation complémentaire en prenant $u = \omega'_2$, ce qui donne $v = \omega''_2$. Les lettres a et b ont les significations suivantes :

$$a_2 = \wp_2\left(\frac{2\omega_2 - 4\omega'_2}{3}\right), \qquad b_2 = \wp_2\left(\frac{\omega_2 - 2\omega'_2}{3}\right),$$

et l'on retrouve les équations primitives, sauf remplacement de e, e', e'' par e'_2, e_2, e''_2. Notre équation, du troisième degré, a donc la racine t_2, définie par les égalités

$$(37)\qquad \frac{e_2}{e'_2} = -\frac{1}{2} + t_2, \qquad \frac{e''_2}{e'_2} = -\frac{1}{2} - t_2.$$

En comparant les fonctions d'indice 2 et celles d'indice 1, on voit que les rapports des périodes, au signe près, ce qui est indifférent, y sont imaginaires conjugués. Les invariants absolus sont donc aussi des imaginaires conjuguées et il est manifeste que les deux rapports $e_1 : e'_1$ et $e_2 : e'_2$ sont dans ce cas. Ainsi t_1 et $-t_2$ sont des imaginaires conjuguées. Nous rappelant ce qui a été dit précédemment sur la première racine t, nous pouvons conclure que les trois quantités $\frac{t}{i}$, fournies par les trois racines t, sont l'une réelle et positive, les deux autres imaginaires conjuguées. Par là est pleinement justifiée la forme (33), prévue pour l'équation.

Voici encore un autre moyen de trouver ce même résultat. Comme

on l'a vu par l'égalité (14), une même fonction elliptique admet à la fois les deux multiplicateurs ε et $1-\varepsilon$ et, pour tous deux, le nombre N n'a qu'une seule valeur. On peut donc former l'équation tout aussi bien en se servant du second multiplicateur et l'on reconnaîtra qu'il y a simplement échange entre e' et e''. Par le changement de ε en $1-\varepsilon$, c'est-à-dire par le changement du signe de $i\sqrt{23}$, la racine t se change en $-t$; il en est de même pour les autres racines. Cette circonstance exige la forme (33) de l'équation cherchée.

Pour une même fonction singulière, les deux multiplicateurs conjugués, ε et $-\varepsilon$ dans le cas de l'ordre proprement primitif, ε et $-(1-\varepsilon)$ dans l'autre cas, coexistent toujours. Ce fait général, conséquence de l'égalité (14), explique, de nouveau, pourquoi deux *formes opposées*, comme $(4, 1, 6)$ et $(4, -1, 6)$ donnent lieu à des invariants conjugués, avec cette conséquence, bien connue, que les invariants réels proviennent des *formes ambiguës*, comme $(2, 1, 12)$, c'est-à-dire des formes proprement équivalentes à leurs opposées.

Une dernière observation avant de calculer notre équation. Si l'on ne savait déjà, par la théorie des formes, que l'ordre improprement primitif contient, en tout, trois classes pour le déterminant -23, le degré 3 de l'équation nous le ferait connaître. Il est évident, en effet, que, s'il existait d'autres classes, le même calcul s'y appliquerait, entraînant seulement quelque permutation dans les accents de e, e', e''. Ces classes fourniraient donc nécessairement des racines de la même équation.

Développement de la résolvante.

Dans le développement de l'équation (32), j'utiliserai la forme démontrée (33), non pour abréger le calcul, mais seulement pour le contrôler. Soit U le premier membre

$$U = A(B - A^2 - 2ee'') + e'(3B - 2A^2 + 2ee'' - 2e'^2),$$

où l'on prendra

$$e = 1, \qquad e' = -\tfrac{1}{2} + t, \qquad e'' = -\tfrac{1}{2} - t, \qquad g_2 = 4t^2 + 3.$$

Soit aussi V le premier membre, sous la forme désirée (33)

$$V = i\sqrt{23}(\alpha t^3 + \beta t) + \gamma t^2 + \delta.$$

On doit s'attendre à ce que U diffère de V par un facteur complexe $\mu + i\nu\sqrt{23}$, et chercher à mettre ce facteur en évidence.

Au lieu de développer complètement U, il est préférable de calculer séparément U pour des valeurs particulières de t.

1° $\qquad t = \frac{1}{2}, \qquad e' = 0, \qquad e'' = -1, \qquad g_2 = 4.$

En se servant de la relation

$$\varepsilon^4 + 11\varepsilon^2 + 36 = 0,$$

on a

$$B = -\tfrac{1}{30}(11\varepsilon^2 + 12), \qquad A = -\tfrac{1}{4}\varepsilon^2.$$

$$2^3.3.5AB = 11\varepsilon^4 + 12\varepsilon^2 = -109\varepsilon^2 - 2^2.3^2.11,$$

$$2^6A^3 = -\varepsilon^6 \qquad = -5.17\varepsilon^2 - 2^2.3^2.11,$$

$$2^2ee''A = \varepsilon^2 \qquad = +\varepsilon^2.$$

Désignant par U_1 la valeur de U correspondante, on trouve ainsi

$$2^6.3.5U_1 = 7.11(2^2.3^2 - \varepsilon^2), \qquad t = \tfrac{1}{2}.$$

2° $\quad t = -\frac{1}{2}, \qquad e' = -1, \qquad e'' = 0, \qquad g_2 = 4, \qquad A = -\frac{1}{2}.$

Le calcul est extrêmement simple. Désignant par U'_1 la valeur de U, je trouve

$$2^3.3.5U'_1 = 7.11(9 + 2\varepsilon^2), \qquad t = -\tfrac{1}{2}.$$

J'en conclus

$$\frac{2^6.3.5}{7.11}(U'_1 + U_1) = 3(36 + 5\varepsilon^2) = \tfrac{3}{2}(17 + 5i\sqrt{23}),$$

$$\frac{2^6.3.5}{7.11}(U'_1 - U_1) = 36 + 17\varepsilon^2 \qquad = \tfrac{1}{2}i\sqrt{23}(17 + 5i\sqrt{23}).$$

En posant

$$(38)\qquad 2^{10}.3.5\,U = (17 + 5i\sqrt{23})\,V,$$

j'ai, de la sorte, V_1 et V'_1 désignant les valeurs de V pour $t = \frac{1}{2}$ et $t = -\frac{1}{2}$,

$$(39)\qquad \begin{cases} V'_1 + V_1 = 2^3.3.7.11, \\ V'_1 - V_1 = 2^3.7.11\,i\sqrt{23}. \end{cases}$$

3° *Calcul du terme en t^3.* — Pour ce calcul, on doit prendre

$$e' = t, \qquad e'' = -t, \qquad g_2 = 4t^2.$$

Voici le calcul :

$$\begin{gathered}
2^2 A = (2 - \varepsilon^2)t, \qquad 2.3.5\,B = -(27 + 11\varepsilon^2)t^2, \\
2^2(A + 3e') = (14 - \varepsilon^2)t, \\
2^2(A + 2e') = (10 - \varepsilon^2)t, \\
2^4 A^2 \qquad = -(32 + 15\varepsilon^2)t^2, \\
2^2.3.5\,B(A + 3e') = -(3^2.43 + 2^2.31\varepsilon^2)t^3, \\
-2^6 A^2(A + 2e') = (2^2.5.43 + 283\varepsilon^2)t^3, \\
2^6.3.5\,U = 7.19(36 + 17\varepsilon^2)t^3 = \frac{7.19}{2}\,i\sqrt{23}(17 + 5i\sqrt{23})\,t^3.
\end{gathered}$$

Suivant la notation (38), voici donc le terme en t^3 dans V :

$$V = 2^3.7.19\,i\sqrt{23}\,t^3 + \ldots.$$

4° *Calcul du terme indépendant de t.* — On doit prendre

$$\begin{gathered}
e' = e'' = -\tfrac{1}{2}, \qquad g_2 = 3, \\
2^3 A = -2 - \varepsilon^2, \qquad 2^3.5\,B = -17 - 11\varepsilon^2.
\end{gathered}$$

On trouve alors

$$2^3(A+3e') = -14 - \varepsilon^2,$$
$$2^3(A+2e') = -10 - \varepsilon^2,$$
$$2^6 A^2 \qquad = -32 - 7\varepsilon^2,$$
$$2^5.5\,B(A+3e') = -79 + 5^2\varepsilon^2,$$
$$2^9 A^2(A+2e') = 2^2.17 + 5^2\varepsilon^2,$$
$$2^4 ee''A = 2 \qquad + \varepsilon^2,$$
$$2^9.5\,U = -9(36+5\varepsilon^2) = -\tfrac{9}{2}(17+5i\sqrt{23}).$$

Le dernier terme de V est ainsi -3^3.

Le premier et le dernier terme ont bien la forme prévue; de plus, suivant (39), les deux valeurs V_1 et V'_1 qui correspondent à $t = \pm\frac{1}{2}$ sont conjuguées. En conséquence, V a la forme

$$V = 7i\sqrt{23}(2^3.19t^3 - 2\beta t) + 2^2\gamma t^2 - 3^3$$

et les égalités (39) donnent

$$\beta = 3^2.7, \qquad \gamma = 3.317.$$

L'équation cherchée est donc enfin

$$(40)\quad V(t) = 0 = 7i\sqrt{23}(2^3.19t^3 - 2.3^2.7t) + 3(2^2.317t^2 - 3^2).$$

Les trois multiplications par $\frac{1}{2}(1+\sqrt{-23})$.

Pour résoudre l'équation (40), le changement d'inconnue, qui s'offre d'abord, est indiqué par l'égalité

$$(41)\qquad \tfrac{2}{3}\sqrt{23}\,t = iz,$$

par où l'équation devient

$$(42)\qquad 7.19z^3 - 317z^2 + 7^2.23z - 23 = 0.$$

Pour la réduire à trois termes, on posera

$$(43) \qquad \frac{3}{z} = 2^5 x + 7^2,$$

ce qui mène à l'équation finale

$$(44) \qquad 23x^3 - 3.53x - 7.23 = 0.$$

Comme on le verra plus loin, il y a des raisons de savoir d'avance que la racine carrée du discriminant de l'équation doit contenir $i\sqrt{23}$ comme seule irrationnalité. Il en est bien ainsi; car, R étant le discriminant, on a, pour l'équation (44),

$$\mathrm{R} = 2^2.\left(\frac{3.53}{23}\right)^3 - 3^3.7^2,$$

$$7^2.23^3 - 2^2.53^3 = 675 = 3^3.5^2,$$

$$\mathrm{R} = -\frac{3^6.5^2}{23^3}, \qquad \sqrt{\mathrm{R}} = \frac{3^3.5}{23.i\sqrt{23}}.$$

Soient

$$(45) \quad g = \sqrt[3]{\frac{7}{2}\,23\sqrt{23} + \frac{5}{2}\,3\sqrt{3}}, \qquad h = \sqrt[3]{\frac{7}{2}\,23\sqrt{23} - \frac{5}{2}\,3\sqrt{3}},$$

racines cubiques prises dans le sens arithmétique et pour lesquelles on a

$$gh = 53.$$

La racine réelle de (44) est

$$x = \frac{1}{\sqrt{23}}(g + h).$$

Les deux autres x_1 et x_2 s'en déduisent comme on sait : pour la première, on remplace g et h par θg et $\theta^2 h$; pour l'autre, par $\theta^2 g$ et θh, et θ est une des racines cubiques imaginaires de l'unité. Afin que les indices 1 et 2 correspondent à ceux qui ont été adoptés plus haut, pour t, il y aura lieu de préciser θ. Je le ferai plus loin, et, dans les formules ci-après, je suppose, par avance, le résultat.

En posant donc

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} 7^2\sqrt{23} + 2^5(g + h) &= c, \\ 7^2\sqrt{23} + 2^5(\theta g + \theta^2 h) &= c_1, \\ 7^2\sqrt{23} + 2^5(\theta^2 g + \theta h) &= c_2, \end{aligned}\right. \qquad \theta = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

on pourra exprimer, par une même formule, chaque racine t en fonction de la quantité correspondante c. Les quantités e, e', e'', dont l'une est arbitraire et dont la somme est nulle, sont déterminées par la condition

$$\frac{e' - e''}{2e} = t = \frac{9i}{2c}.$$

En vertu de l'homogénéité, le choix arbitraire de e est indifférent. Je prendrai donc

$$(47)\qquad e = 2c, \qquad e' = 9i - c, \qquad e'' = -9i - c,$$

pour le cas de l'égalité (20), ou, en d'autres termes, pour la forme (2, 1, 12); puis, en permutant les accents comme il a été expliqué et comme le rappellent les égalités (35) et (37), on aura

$$(48)\qquad e_1' = 2c_1, \qquad e_1'' = 9i - c_1, \qquad e_1 = -9i - c_1,$$

dans le cas de l'égalité (34), correspondant à la forme (4, 1, 6); puis enfin

$$(49)\qquad e_2 = 2c_2, \qquad e_2 = 9i - c_2, \qquad e_2'' = -9i - c_2,$$

pour le cas de l'égalité (36), correspondant à la forme (4, −1, 6).

Ces permutations des accents se rapportent seulement à la désignation arbitrairement uniforme, des périodes dans les trois cas. Elle disparaît dans l'expression des invariants, que voici :

$$g_2 = 2^2.3(c^2 - 3^3), \qquad g_3 = 2^3 c(c^2 + 3^4),$$
$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = -2^6.3^8(c^2 + 3^2)^2;$$
$$\frac{g_2^3}{3^3(c^2 - 3^3)^3} = \frac{g_3^2}{c^2(c^2 + 3^4)^2} = \frac{-\Delta}{3^8(c^2 + 3^2)^2} = 2^6.$$

Je vais, dès maintenant, fixer le signe de la partie imaginaire dans θ. On verra, plus loin, un moyen purement algébrique pour cet objet. Quant à présent, je vais employer les séries $\mathfrak{S}$, formées uniformément avec la quantité $q = e^{\frac{i\pi\omega'}{\omega}}$. En posant donc

$$Q = e^{-\frac{1}{4}\pi\sqrt{23}},$$

j'aurai, pour chacun des trois cas (20, 34, 36),

$$q = e^{-\frac{i\pi}{2}}Q^2, \qquad q_1 = e^{-\frac{i\pi}{4}}Q, \qquad q_2 = e^{+\frac{i\pi}{4}}Q.$$

Prenons la formule (où les fonctions $\mathfrak{S}$ ont l'argument zéro)

$$\frac{e''-e'}{e-e''} = \left(\frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_0}\right)^4 = 2^4 q\left(\frac{1+q^2+q^6+\ldots}{1-2q+2q^4+\ldots}\right)^4,$$

pour l'un ou l'autre des deux derniers cas. Comme Q est inférieur à $e^{-\pi} = 0{,}04\ldots$, les signes de la partie réelle et de la partie imaginaire sont définis par le terme $2^4 q$ du second membre :

$$\frac{e_1''-e_1'}{e_1-e_1''} = 2^4 e^{-\frac{i\pi}{4}}Q + \ldots = 2^3\sqrt{2}(1-i)Q + \ldots.$$

Il n'y a aucune utilité à considérer l'égalité analogue avec les indices 2; elle fournirait, de part et d'autre, les quantités conjuguées des précédentes.

Suivant les expressions (48), il vient, en supposant $c_1 = \alpha + i\beta$,

$$8\sqrt{2}(1-i)Q + \ldots = \frac{3c_1 - 9i}{18i} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\beta - \frac{1}{6}i\alpha,$$

d'où résulte que β est positif. Mais, d'après (46), on a

$$i\beta = 2^4(\theta - \theta^2)(g-h).$$

Comme $(g-h)$ est positif (45), il faut effectivement choisir θ ainsi que je l'ai fait plus haut.

Transformations du troisième ordre.

Nous possédons, dès à présent, la pleine connaissance de tous les éléments pour les trois fonctions elliptiques singulières; car les six quantités a, b, a_1, b_1, a_2, b_2 sont explicitement fournies par les équations (30) et (31 a). Nous pouvons en déduire six autres, jouant le rôle analogue à l'égard du multiplicateur conjugué. Comme on le voit par les équations générales (3) et (12), où l'on prendra $k=-\frac{1}{2}$, $k'=\frac{1}{2}$, ces quantités sont les suivantes

$$b'=\mathfrak{p}\frac{\omega+\omega'}{3},\qquad b'_1=\mathfrak{p}_1\frac{\omega_1+2\omega'_1}{3},\qquad b'_1=\mathfrak{p}_2\left(\frac{\omega'_2}{3}+\omega_2\right),$$

et les a ont les arguments doubles. Les formules ci-dessus montrent suffisamment que le changement du signe de i change a et b en a' et b', a_1 et b_1 en a'_2 et b'_2, a_2 et b_2 en a'_1 et b'_1.

Les six quantités b, b', b_1, b'_1, b_2, b'_2 servent de base à des transformations du sixième ordre, deux pour chaque fonction elliptique, et ces transformations changent la fonction en elle-même.

Les quantités a, a', ... peuvent servir de base à des transformations du troisième ordre. Ces dernières échangent les fonctions les unes dans les autres, comme je vais le montrer.

Désignant par ρ un facteur inconnu, posons

$$\rho\omega'=3\omega_2,\qquad \rho\omega=-\omega'_2.$$

Les relations (11)

$$\frac{2\omega'+\omega}{\omega}=-\frac{12\omega+\omega'}{\omega'}=i\sqrt{23}$$

se changent en les suivantes

$$-\frac{6\omega_2-\omega'_2}{\omega'_2}=\frac{4\omega'_2-\omega_2}{\omega_2}=i\sqrt{23};$$

d'où l'on voit que le facteur ρ peut être choisi effectivement de manière à attribuer la même signification que précédemment aux lettres ω_2 et ω'_2. J'ai ici une transformation de troisième ordre, qui se figure par la relation

$$\rho^2 \mathfrak{p}_2(\rho u) = \mathfrak{p} u + \mathfrak{p}\left(u - \frac{2\omega'}{3}\right) + \mathfrak{p}\left(u + \frac{2\omega'}{3}\right) - 2\mathfrak{p}\frac{2\omega'}{3}.$$

En prenant successivement $u = \omega', \omega, \omega''$, j'obtiens

$$\rho^2 e_2 = e' + 2(b - a),$$

$$\rho^2 e'_2 = e + 2\mathfrak{p}\left(\omega - \frac{2\omega'}{3}\right) - 2a,$$

$$\rho^2 e''_2 = e'' + 2\mathfrak{p}\left(\omega - \frac{\omega'}{3}\right) - 2a,$$

et l'on remarquera, en passant, que, par addition de ces trois égalités, se prouve, derechef, la relation ($29a$). De là, suivant les égalités (30) et (31), je conclus

$$\rho^2 e_2 = e' - 2A = -\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 e'',$$

$$\rho^2 e'_2 = 3e - 2a + 2\frac{(e - e')(e - e'')}{a - e},$$

$$\rho^2 e''_2 = e'' + 2e - 2a + 2\frac{(e - e')(e - e'')}{b - e},$$

$$\rho^2(e'_2 - e''_2) = e - e'' + 2\frac{(e - e')(e - e'')(b - a)}{(a - e)(b - e)},$$

et cette dernière, comme on l'a vu plus haut, se change ainsi :

$$\rho^2(e'_2 - e''_2) = e - e'' + 2\frac{(e - e'')A}{a + b + e'} = (e - e'')\frac{a + b + e' + 2A}{a + b + e'}.$$

Remettant, pour A, son expression (31), j'ai enfin

$$\frac{e_2}{e'_2 - e''_2} = -\frac{e''(a + b + 2e' + \frac{1}{2}\varepsilon^2 e'')}{2(e - e'')(a + b + e')}.$$

C'est là une formule qui donne la quantité c_2 en fonction rationnelle de c, avec adjonction de ε, bien entendu. Disons, pour abréger, que nous avons ainsi trouvé $c_2 = \varphi(c)$.

Par un calcul tout pareil, en posant successivement

$$\rho_1\omega'_1 = 3\omega, \qquad \rho_1\omega_1 = -\omega' - \omega,$$
$$\rho_2\omega'_2 = \omega'_1 + 2\omega_1, \qquad \rho_2\omega_2 = -\omega'_1 + \omega_1,$$

on trouve aussi $c = \varphi(c_1)$, $c_1 = \varphi(c_2)$. En changeant le signe de i, on aurait les analogues

$$c_1 = \psi(c), \qquad c = \psi(c_2), \qquad c_2 = \psi(c_1).$$

Ces formules traduisent le caractère *abélien*, qui appartient, comme on le sait, à toutes les équations dont dépendent les fonctions elliptiques à multiplication complexe. Elles donnent la raison *a priori* de ce fait que le discriminant de l'équation est un carré, sauf le facteur -23.

Transformations du second ordre.

Je vais maintenant examiner, pour une quelconque des trois fonctions singulières, les trois transformations du second ordre : de ces transformations, il y en a deux qui échangent les fonctions précédentes, tandis que l'autre transformation conduit à une fonction nouvelle, *correspondant à l'ordre proprement primitif*. Les six transformations, qui échangent les fonctions précédentes, sont naturellement inverses, deux à deux. Elles se distinguent, dans les formules ci-après, par l'emploi de la lettre σ pour les coefficients de proportionnalité, et cette lettre, avec ou sans accent, pourvue d'un même indice, se rapporte aux deux transformations inverses. Pour les trois autres transformations, le coefficient de proportionnalité est dénoté par la lettre τ, et les éléments des nouvelles fonctions sont indiqués par des majuscules.

Voici les formules :

$$
(50)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\sigma_2\omega = \omega_1, & \sigma_2\omega' = 2\omega'_1, \\
\sigma'_1\omega = \omega_2, & \sigma'_1\omega' = 2\omega'_2 - \omega_2, \\
\tau\omega = 2\Omega, & \tau\omega' = \Omega' - \Omega; \\
\sigma\omega_1 = \omega_2 - \omega'_2, & \sigma\omega'_1 = \omega_2 + \omega'_2, \\
\sigma'_2\omega_1 = 2\omega, & \sigma'_2\omega'_1 = \omega', \\
\tau_1\omega_1 = \Omega'_1, & \tau_1\omega'_1 = 2\Omega_1; \\
\sigma_1\omega_2 = 2\omega, & \sigma_1\omega'_2 = \omega' + \omega, \\
\sigma'\omega_2 = \omega_1 + \omega'_1, & \sigma'\omega'_2 = -\omega_1 + \omega'_1, \\
\tau_2\omega_2 = -\Omega'_2, & \tau_2\omega'_2 = 2\Omega_2;
\end{array}
\right.
$$

$$\sigma\sigma' = \sigma_1\sigma'_1 = \sigma_2\sigma'_2 = 2.$$

Les trois nouvelles fonctions correspondent aux trois formes réduites $(1, 0, 24)$ et $(3, \pm 1, 8)$:

$$\Omega'^2 + 23\Omega^2 = 0.$$

$$3\Omega'^2_1 - 2\Omega_1\Omega'_1 + 8\Omega^2_1 = 0,$$

$$3\Omega'^2_2 + 2\Omega_2\Omega'_2 + 8\Omega^2_2 = 0.$$

Je considère la première de ces transformations. Elle est traduite par l'égalité

$$\sigma_2^2 \wp_1(\sigma_2 u) = \wp u + \wp(u - \omega') - \wp\omega'.$$

d'où l'on déduit, en prenant successivement, pour u, les valeurs ω, $\frac{1}{2}\omega'$, $\frac{1}{2}\omega' + \omega$,

$$\sigma_2^2 e_1 = e + e'' - e' = -2e',$$

$$\sigma_2^2 e'_1 = e' \pm 2\sqrt{(e' - e)(e' - e'')}.$$

$$\sigma_2^2 e''_1 = e' \mp 2\sqrt{(e' - e)(e' - e'')}.$$

ce qui mène à la relation bien connue

$$(51)\qquad \pm 2\frac{\sqrt{(e' - e)(e' - e'')}}{e'} = \frac{e''_1 - e'_1}{e_1}.$$

La seconde transformation donne, de même,

$$\pm 2\frac{\sqrt{(e''-e')(e''-e)}}{e''} = \frac{e''_2 - e'_2}{e_2}.$$

Introduisant les racines t, t_1, t_2, d'après (21), (35) et (37), on a ainsi

$$(52)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{4\sqrt{t(2t-3)}}{1-2t} + \frac{3-2t_1}{1+2t_1} = 0,\\ &\frac{4\sqrt{t(2t+3)}}{1+2t} + \frac{3+2t_2}{1-2t_2} = 0.\end{aligned}\right.$$

Les quatre autres transformations analogues conduisent à des formules que l'on déduit aussi de ces dernières par la permutation circulaire des indices.

J'ai annoncé un moyen, purement algébrique, de distinguer celle des deux racines cubiques de l'unité qu'il faut désigner, dans les formules ci-dessus, par θ. Le voici. Tout d'abord, substituant, à la place de x, dans le premier membre (44), successivement les deux nombres 3 et $\frac{49}{16}$, on trouve, pour résultats, -17 et $+\frac{3^2.5^2.7^2.11}{2^{12}}$. La racine réelle x est ainsi connue, à moins de $\frac{1}{16}$ près, et l'on voit que c est compris entre $145\sqrt{23}$ et $147\sqrt{23}$.

Prenons l'égalité (51) qui donne

$$\frac{c_1 - 3i}{c_1 + 9i} = \mp 2\frac{\sqrt{-6i(c-3i)}}{c-9i}.$$

Vu la grandeur de c, les quantités $c-3i$ et $c-9i$ peuvent ici être remplacées, pour fixer les signes, par c lui-même; et l'on a sensiblement

$$(53)\qquad \frac{c_1 - 3i}{c_1 + 9i} = \mp 2\sqrt{\frac{3}{c}}(1-i).$$

Si l'on pose $c_1 = \alpha + i\beta$, on a (46)

$$\alpha = 7^2\sqrt{23} - 2^4(g+h) = \sqrt{23}(7^2 - 2^4 x),$$

quantité positive, x étant inférieur à $\frac{19}{16}$. Par conséquent, dans

$$\frac{c_1 - 3i}{c_1 + 9i} = \frac{\alpha + i(\beta - 3)}{\alpha + i(\beta + 9)} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 27 + 6\beta - 12i\alpha}{\alpha^2 + (\beta + 9)^2},$$

la partie imaginaire est négative, d'où l'on voit déjà qu'il faut prendre le signe *plus* devant le second membre (53). On doit donc avoir

$$\alpha^2 + \beta^2 - 27 + 6\beta > 0.$$

Or, en remplaçant t par $\frac{9}{2}\frac{i}{c}$ dans l'équation (40), on trouve

$$c c_1 c_2 = 3^3 . 7 . 19 \sqrt{23}.$$

D'après la grandeur de c, il en résulte $c_1 c_2 < 3^3$, c'est-à-dire

$$\alpha^2 + \beta^2 - 27 < 0.$$

En conséquence, β est positif. C'est à quoi j'étais parvenu précédemment, pour en déduire la détermination précise de θ.

Ainsi qu'on l'a vu par les transformations du troisième ordre, t_1 et t_2 s'expriment rationnellement en fonction de t, sauf adjonction de ε. Les deux quantités $\sqrt{\frac{2t \pm 3}{t}}$ peuvent donc être exprimées de la même manière; c'est ce que je vais chercher à faire. Soient

$$s = \sqrt{\frac{2t - 3}{t}}, \qquad s_1 = \sqrt{\frac{2t_1 - 3}{t_1}}, \qquad s_2 = \sqrt{\frac{2t_2 - 3}{t_2}},$$

ces racines carrées étant prises avec les signes que leur attribuent la première égalité (52) et ses analogues. Recourant à l'équation (40), dont t, t_1, t_2 sont les racines, j'ai

$$(54) \qquad (s s_1 s_2)^2 = 8 \frac{V(\frac{3}{2})}{V(0)}.$$

D'ailleurs, par l'égalité (52),

$$s = \frac{(\frac{3}{2} - t_1)(\frac{1}{2} - t_1)}{2t(-\frac{1}{2} - t_1)}$$

et, ses analogues multipliées membre à membre, j'ai aussi

$$ss_1 s_2 = -\frac{1}{8}\frac{V(\frac{3}{2})V(\frac{1}{2})}{V(0)V(-\frac{1}{2})};$$

par conséquent,

$$ss_1 s_2 = -2^6\frac{V(-\frac{1}{2})}{V(\frac{1}{2})}.$$

Les équations (39) nous offrent, calculées déjà sous la dénomination de V_1 et V'_1, les quantités $V(\pm\frac{1}{2})$, savoir

$$V(\pm\tfrac{1}{2}) = 2^2.7.11(3 \mp i\sqrt{23}).$$

Il en résulte

$$ss_1 s_2 = -2^6\frac{3-i\sqrt{23}}{3+i\sqrt{23}} = -2(3+i\sqrt{23})^2 = 2^2(7-3i\sqrt{23}).$$

Une vérification s'offre naturellement par le calcul direct de $V(\frac{3}{2})$ qui, d'après (54), donne

$$(ss_1 s_2)^2 = -2^5(79+3.7i\sqrt{23}) = 2^4(7-3i\sqrt{23})^2.$$

De la même égalité (52) je tire encore le résultat suivant

$$(55)\qquad \frac{1}{4}\sum\frac{1-2t}{st} = \sum\left(1-\frac{4}{3-2t_1}\right) = 3-2\frac{V'(\frac{3}{2})}{V(\frac{3}{2})},$$

où V' désigne la dérivée de V, et où le signe sommatoire s'applique aux trois racines. Par un calcul direct, on a

$$V'(\tfrac{3}{2}) = 2^2.3^2(317+5^2.7i\sqrt{23}),$$

quantité qui doit être divisée par $V(\frac{3}{2})$. Le calcul précédent a donné $V(\frac{3}{2})$ sous la forme

$$V(\tfrac{3}{2}) = -\frac{3^3}{2}(3+i\sqrt{23})^4 = -\frac{2^{19}.3^3}{(3-i\sqrt{23})^4}.$$

La division s'effectue donc de la manière la plus simple, en multi-

pliant successivement par $3 - i\sqrt{23}$:

$$\begin{aligned}
(317 + 5^2.7i\sqrt{23})(3 - i\sqrt{23}) &= 2^4(311 + 13i\sqrt{23}),\\
(311 + 13i\sqrt{23})(3 - i\sqrt{23}) &= 2^4(7.11 - 17i\sqrt{23}),\\
(7.11 - 17i\sqrt{23})(3 - i\sqrt{23}) &= -2^5(5 + 2^2 i\sqrt{23}),\\
(5 + 2^2 i\sqrt{23})(3 - i\sqrt{23}) &= 107 + 7i\sqrt{23}.
\end{aligned}$$

$$\frac{V'(\frac{3}{2})}{V(\frac{3}{2})} = \frac{1}{2^4.3}(107 + 7i\sqrt{23}),$$

$$3 - 2\frac{V'(\frac{3}{2})}{V(\frac{3}{2})} = -\frac{7}{2^4.3}(5 + i\sqrt{23}).$$

D'après l'expression de s, on a, d'autre part,

$$\frac{1 - 2t}{st} = -\frac{s^2 + 4}{3s}.$$

J'ai donc ce résultat, que j'avais en vue d'obtenir.

$$\sum\left(s + \frac{4}{s}\right) = \frac{7}{2}(5 + i\sqrt{23}).$$

Soit maintenant

$$(56) \qquad s^3 - Ns^2 + Ms - 2^2(7 - 3i\sqrt{23}) = 0$$

l'équation dont s, s_1, s_2 sont les racines. La précédente relation donne

$$(57) \qquad N + \frac{M}{7 - 3i\sqrt{23}} = \frac{7}{2}(5 + i\sqrt{23}).$$

Ce sont ces deux coefficients M et N dont la détermination fournira l'expression, que je cherche, de s en fonction rationnelle de t. On peut tirer encore de l'égalité (52) deux autres équations du premier degré entre M et N par le moyen suivant. Elle donne immédiatement

$$4\sum\frac{st}{1 - 2t} = 3 + 2\frac{V'(-\frac{1}{2})}{V(-\frac{1}{2})}.$$

D'ailleurs,

$$\sum_1 \frac{st}{2t} = -3\sum \frac{s}{s^2+4} = -\frac{3}{2}\sum\left(\frac{1}{s+2i}+\frac{1}{s-2i}\right).$$

En désignant par $F(s)$ le premier membre (56), on a, de la sorte,

$$\frac{F'(2i)}{F(2i)}+\frac{F'(-2i)}{F(-2i)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{V'(-\frac{1}{2})}{V(-\frac{1}{2})}.$$

Pour revenir de l'équation (56) à l'équation en t, il faut chasser l'irrationnelle s. On a donc identiquement

$$(58)\qquad F(s)F(-s)=\frac{\lambda}{t^3}V(t),$$

où λ est un facteur constant, s et t étant deux variables liées par la relation

$$s^2=\frac{2t-3}{t}.$$

En différentiant, je conclus

$$\frac{(2-s^2)^2}{6s}\left[\frac{F'(s)}{F(s)}-\frac{F'(-s)}{F(-s)}\right]=\frac{V'(t)}{V(t)}-\frac{3}{t},$$

puis, en prenant $s=2i$,

$$\frac{F'(2i)}{F(2i)}-\frac{F'(-2i)}{F(-2i)}=\frac{i}{3}\frac{V'(\frac{1}{2})}{V(\frac{1}{2})}-2i.$$

La connaissance des deux quantités $\frac{F'(\pm 2i)}{F(\pm 2i)}$ procure les deux équations du premier degré dont j'ai parlé. Me contentant d'avoir indiqué ce moyen, je vais en employer un autre, encore fondé sur la relation (58). Substituant dans $V(t)$ l'expression $t=\frac{3}{2-s^2}$, on a l'équation

$$s^6-2.3s^4-2^3.157s^2+2^5.79-2.7i\sqrt{23}(7s^4-2^2.7s^2-2^4.3)=0,$$

dont le premier membre doit reproduire

$$-F(s)F(-s) = s^2(s^2+M)^2 - \left[Ns^2 + 2^2(7 - 3i\sqrt{23})\right]^2.$$

De là deux équations

$$(59) \qquad 2M - N^2 = -2(3 + 7^2 i\sqrt{23}),$$

$$(60) \quad \begin{cases} M^2 - 2^3(7 - 3i\sqrt{23})N = -2^3(157 - 7^2 i\sqrt{23}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = -2^2(7 - 3i\sqrt{23})(5.7 + i\sqrt{23}). \end{cases}$$

Entre cette dernière et l'équation (57) éliminant N, j'obtiens

$$M^2 + 8M = 2^3.3i\sqrt{23}(7 - 3i\sqrt{23}),$$

équation du second degré donnant les deux racines

$$M = -4 \pm 2(3.7 + i\sqrt{23}).$$

Une seule convient, que l'on distingue immédiatement comme devant, par l'équation (59), fournir, pour N^2, un carré parfait. On trouve ainsi

$$M = 2(19 + i\sqrt{23}), \qquad N = 17 + 3i\sqrt{23},$$

$$F(s) = s^3 - 17s^2 + 2.19s - 2^2.7 - i\sqrt{23}(3s^2 - 2s - 2^2.3)$$

tel est le premier membre de l'équation cherchée.

Si, de même, on pose

$$\sqrt{\frac{2t+3}{t}} = s', \qquad \sqrt{\frac{2t_1+3}{t_1}} = s'_1, \qquad \sqrt{\frac{2t_2+3}{t_2}} = s'_2,$$

ces quantités sont les racines de l'équation $\Phi(s') = 0$, dont le premier membre est conjugué du précédent,

$$\Phi(s') = s'^3 - 17s'^2 + 2.19s' - 2^2.7 + i\sqrt{23}(3s'^2 - 2s' - 2^2.3).$$

Par là sont exprimés, comme on le voulait, s et s' en fonction de t. On

a, en effet,

$$(61)\qquad s = \frac{Ns^2 + 2^2(7 - 3i\sqrt{23})}{s^2 + M},$$

égalité où l'on mettra, au second membre, $\frac{2t-3}{t}$ à la place de s^2. Pour s', on prendra la relation analogue où l'on mettra $\frac{2t+3}{t}$ à la place de s'^2.

C'est en vue d'effectuer complètement les trois dernières transformations du second ordre que j'ai calculé F et Φ. J'arrive à ces transformations.

Les trois fonctions de l'ordre proprement primitif.

Aux périodes 2Ω, $2\Omega'$, définies par les relations (50),

$$\tau\omega = 2\Omega, \qquad \tau\omega' = \Omega' - \Omega,$$

correspond une nouvelle fonction Pu, dont je dénote les éléments par des lettres majuscules. La transformation conduit, par le même calcul que plus haut, à la relation suivante, analogue de l'égalité (51),

$$\pm 2\frac{\sqrt{(e-e')(e-e'')}}{e} = \frac{E - E'}{E''}.$$

Le premier membre est, en valeur absolue, égal à

$$\sqrt{(3-2t)(3+2t)},$$

quantité réelle, puisque t est purement imaginaire. D'après la nature de la fonction P, dont les invariants doivent être réels et le discriminant positif, les trois quantités E, E'', E' doivent être réelles, rangées ainsi en ordre décroissant; de plus, le rapport $\Omega' : i\Omega$ étant supérieur à l'unité, E'' est négatif, et l'on aura

$$(62)\qquad \frac{E - E'}{E''} = \sqrt{9 - 4t^2} = itss';$$

le signe est ainsi choisi, parce que s et s' sont des quantités conjuguées, comme il résulte du calcul précédent, et que it est réel et négatif.

Ayant obtenu s et s' en fonction rationnelle de t, nous avons donc, sous la même forme, les éléments nouveaux. Mais il faut réduire leur expression à la forme la plus simple, et, pour ce but, je vais exprimer tss' par une fraction du premier degré. Soit

$$tss' = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{G}}$$

la fraction cherchée. Ayant mis la relation (61) et son analogue sous la forme

$$s = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{T}}, \qquad s' = \frac{\mathrm{S}'}{\mathrm{T}'},$$

on conclura que l'égalité

$$\frac{t\mathrm{SS}'}{\mathrm{TT}'} - \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{G}} = 0$$

a lieu en vertu de l'équation $\mathrm{V} = 0$. Le premier membre est donc divisible par V, et doit avoir la forme $\frac{\mathrm{KV}}{\mathrm{TT}'\mathrm{G}}$. De là,

$$(63) \qquad \frac{t\mathrm{SS}'\mathrm{G} - \mathrm{KV}}{\mathrm{TT}'} = \mathrm{H},$$

ce qui doit être une identité. Il s'agit donc de trouver les deux polynômes du premier degré G et K par la condition que le numérateur soit seulement du troisième degré au lieu du quatrième, qu'il soit en outre divisible par TT'. Le quotient, du premier degré, sera le binôme H.

En substituant dans l'égalité (61), on a d'abord

$$\mathrm{S} = t\left[\mathrm{N}s^2 + 2^2(7 - 3i\sqrt{23})\right] = 2.31t - 3.17 - 3(2t+3)i\sqrt{23},$$

$$\mathrm{T} = t(s^2 + \mathrm{M}) = 2^3.5t - 3 + 2it\sqrt{23},$$

$$\mathrm{S}' = 2.31t + 3.17 - 3(2t-3)i\sqrt{23},$$

$$\mathrm{T}' = 2^3.5t + 3 - 2it\sqrt{23},$$

$$\mathrm{V} = (2t-3)\mathrm{T}^2 - t\mathrm{S}^2 = -(2t+3)\mathrm{T}'^2 + t\mathrm{S}'^2.$$

Pour $T = 0$, on a ainsi

$$V = -lS^2;$$

on doit donc avoir

$$(64) \qquad S'G + KS \equiv 0 \qquad (\text{div. } T)$$

et, semblablement,

$$(65) \qquad SG - KS' \equiv 0 \qquad (\text{div. } T').$$

Au moyen des égalités

$$T + T' = 2^4.5l,$$
$$(2^2.5 - i\sqrt{23})T - (2^2.5 + i\sqrt{23})T' = -2^3.3.5,$$

on peut exprimer S et S', sous forme linéaire et homogène, en T et T'; on trouve ainsi

$$S = \quad (11 + i\sqrt{23})T - 2(3 + i\sqrt{23})T',$$
$$S' = -2(3 - i\sqrt{23})T + (11 - i\sqrt{23})T'.$$

Par là, les deux conditions (64) et (65) deviennent

$$(11 - i\sqrt{23})G - 2(3 + i\sqrt{23})K \equiv 0 \qquad (\text{div. } T),$$
$$(11 + i\sqrt{23})G + 2(3 - i\sqrt{23})K \equiv 0 \qquad (\text{div. } T').$$

Si donc on pose

$$G = \gamma T + \gamma' T', \qquad K = kT + k'T',$$

on obtient les conditions

$$(11 - i\sqrt{23})\gamma' - 2(3 + i\sqrt{23})k' = 0,$$
$$(11 + i\sqrt{23})\gamma + 2(3 - i\sqrt{23})k = 0.$$

En exprimant enfin que le terme du quatrième degré disparaît dans le

numérateur (63), on trouve la dernière équation

$$\begin{aligned}&2^3.73\left[(20+i\sqrt{23})\gamma+(20-i\sqrt{23})\gamma'\right]\\&\quad=7.19i\sqrt{23}\left[(20+i\sqrt{23})k+(20-i\sqrt{23})k'\right].\end{aligned}$$

Les équations précédentes fournissent

$$2^5k'=(5-7i\sqrt{23})\gamma',\qquad 2^5k=-(5+7i\sqrt{23})\gamma.$$

Substituant dans la dernière et prenant arbitrairement un coefficient de proportionnalité, je trouve

$$\begin{aligned}\gamma&=\tfrac{1}{2}(3.11+5i\sqrt{23}),&\gamma'&=\tfrac{1}{2}(-3.11+5i\sqrt{23}),\\k&=2(5-2i\sqrt{23}),&k'&=2(5+2i\sqrt{23}).\end{aligned}$$

d'où résulte

$$\begin{aligned}G&=-3.^2 11+2.7.19it\sqrt{23},\\K&=2^3(2.73t+3i\sqrt{23}).\end{aligned}$$

Il reste à trouver H. A cet effet, je prends $t=\frac{3}{2}$, ce qui donne

$$V=-tS^2,$$

et, par conséquent,

$$TT'H=\tfrac{3}{2}S(S'G+SK).$$

Pour $t=\frac{3}{2}$, nous avons

$$\begin{aligned}S&=2.3(7-3i\sqrt{23}),&S'&=2^4.3^2,\\K&=2^3.3(73+i\sqrt{23}),\\G&=3(-3.11+7.19i\sqrt{23}),\\S'G+SK&=2^4.3^2(481+11.17i\sqrt{23}).\end{aligned}$$

D'autre part,

$$T = 3(19 + i\sqrt{23}) = \tfrac{3}{2}(5 - i\sqrt{23})(3 + i\sqrt{23}),$$

$$T' = 3(21 - i\sqrt{23}) = \tfrac{3}{4}(5 - 3i\sqrt{23})(3 + i\sqrt{23}),$$

$$TT' = -\frac{3^2}{2}(11 + 5i\sqrt{23})(3 + i\sqrt{23})^2,$$

$$\tfrac{3}{2}S = 3^2(7 - 3i\sqrt{23}) = -\frac{3^2}{2}(3 + i\sqrt{23})^2.$$

Il vient donc

$$(11 + 5i\sqrt{23})H = 2^4.3^2(481 + 11.17i\sqrt{23})$$

ou finalement

$$H = 2^3.3^2(7.11 - i\sqrt{23}), \qquad \left(t = \frac{3}{2}\right).$$

Le changement du signe de t et de $\sqrt{23}$ laisse inaltérés V et G, change K en $-$ K, échange T et $-$ T′, ainsi que S et $-$ S′; ce changement a donc, pour effet, de reproduire H, changé de signe. On a donc aussi

$$H = -2^3.3^2(7.11 + i\sqrt{23}), \qquad \left(t = -\frac{3}{2}\right).$$

Par conséquent, pour t quelconque,

$$H = 2^3.3(2.7.11t - 3i\sqrt{23}).$$

Comme vérification de ce calcul, prenons $t = 0$, ce qui donne

$$\left.\begin{aligned} -KV &= 2^3.3^4 i\sqrt{23}, \\ TT'H &= 2^3.3^4 i\sqrt{23}, \end{aligned}\right\} \quad t = 0.$$

J'ai donc la formule cherchée, savoir

$$tss' = \frac{H}{G} = -\frac{2^3.3(2.7.11t - 3i\sqrt{23})}{3^2.11 - 2.7.19it\sqrt{23}}.$$

Mettant $t = \frac{9i}{2c}$, on la change en la suivante :

$$(64) \qquad tss' = \frac{2^3(c\sqrt{23} - 3.7.11)i}{11c + 7.19\sqrt{23}}.$$

Remplaçant enfin c par son expression (46), j'en déduis, suivant (62),

$$(65) \qquad \frac{E - E'}{-8E''} = \frac{4 + (g+h)\sqrt{23}}{21\sqrt{23} + 11(g+h)}.$$

Prenant arbitrairement un coefficient de proportion, je poserai donc

$$(66) \qquad \left\{ \begin{aligned} E &= 21\sqrt{23} + 32 + (8\sqrt{23} + 11)(g+h), \\ E' &= 21\sqrt{23} - 32 - (8\sqrt{23} - 11)(g+h), \\ E'' &= -42\sqrt{23} - 22(g+h). \end{aligned} \right.$$

Pour les deux autres fonctions P_1 et P_2, les formules seront analogues, $g+h$ étant remplacé par $\theta g + \theta^2 h$ ou $\theta^2 g + \theta h$. Par les égalités (50), il est manifeste que, dans ces formules, E'' est remplacé par E''_1 ou E''_2. Mais il reste à savoir dans quel ordre E et E' sont remplacés par E_1 et E'_1 ou E_2 et E'_2. Pour ce but, supposant, dans le second membre (65), $g+h$ remplacé par $\theta g + \theta^2 h$, multiplions les deux termes par le conjugué du dénominateur, ce qui donne

$$\left[4 + (\theta g + \theta^2 h)\sqrt{23}\right]\left[21\sqrt{23} + 11(\theta^2 g + \theta h)\right].$$

La partie imaginaire de ce produit est

$$(21.23 - 4.11)(g - h)\frac{i\sqrt{3}}{2};$$

le coefficient de i est positif. L'échange de $E - E'$ en $\pm(E_1 - E'_1)$ doit donc être fait de manière que dans

$$\mp \frac{E_1 - E'_1}{E''_1}$$

la partie imaginaire soit positive. En employant les séries $\mathfrak{S}$, on trouve, pour la partie principale,

$$\frac{E_1 - E_1''}{E_1'} = -\frac{3}{16} e^{-\frac{i\pi}{3}} e^{\frac{\pi\sqrt{23}}{3}}, \qquad \left(\frac{\omega_1'}{\omega_1} = \frac{1 + i\sqrt{23}}{3}\right);$$

les autres termes sont sans influence sur le signe de la partie imaginaire : c'est le signe *plus*. C'est donc E_1'' qui remplace E. Quant à la fonction P_2, ses éléments sont conjugués des précédents. Ainsi, en passant aux fonctions P_1 ou P_2, on doit, dans les formules (66), remplacer $g + h$ par $\theta g + \theta^2 h$ ou par $\theta^2 g + \theta h$ et, en même temps, E, E′, E″ par E_1'', E_1, E_1' ou par E_2'', E_2, E_2'.

Ainsi est pleinement achevée la solution du problème proposé.

Comparaison avec les résultats antérieurs.

Soit posé

$$(67) \qquad y = \frac{(e - e')(e - e'')}{(e' - e'')^2} = \frac{9 - 4t^2}{16t^2}.$$

Prenons $V(t)V(-t)$, puis remplaçons t^2 par son expression en y, savoir

$$t^2 = \frac{9}{4} \frac{1}{1 + 4y}.$$

Nous obtenons ainsi, pour y, l'équation

$$(4y + 1)(y - 79)^2 + 7^2 . 23(7y - 3)^2 = 0,$$

qui, étant développée, se réduit à

$$\left(\frac{y}{16}\right)^3 + 853\left(\frac{y}{16}\right)^2 - 22\left(\frac{y}{16}\right) + 1 = 0.$$

C'est l'équation donnée, par le R. P. Joubert, dans les *Comptes rendus* de 1860 (1er semestre, p. 912). Sa résolution suffit, bien entendu, pour définir explicitement les fonctions cherchées, puisque l'in-

variant absolu est rationnel en t^2. D'une manière générale, pour toute fonction elliptique, on a

$$(68)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho^2 g_2 &= 2^2.3(1+y)(1+4y),\\ \rho^3 g_3 &= 2^2(y-2)(1+4y)^2,\\ \rho^6\Delta &= 2^4.3^6 y^2(1+4y)^3. \end{aligned}\right.$$

en désignant par ρ un coefficient d'homogénéité, dont l'expression est

$$\rho = \frac{3\sqrt{1+4y}}{e'-e''} = \frac{9e}{(e'-e'')^2}.$$

Ce coefficient ρ peut être pris *ad libitum;* aussi les invariants sont-ils définis par la seule quantité y, ou par t^2. Mais, pour avoir les quantités e, e', e'', sans nouvelle irrationnelle, il faut connaître t.

Semblablement, à l'égard des trois fonctions répondant à l'ordre proprement primitif, la connaissance de y suffit aussi pour définir les invariants. Effectivement, en prenant la transformation du second ordre qui fait passer de $\mathfrak{p}$ à P, ainsi que la transformation inverse, on a les deux relations

$$\pm 2\frac{\sqrt{(e-e')(e-e'')}}{e} = \frac{E-E'}{E''},\qquad \pm 2\frac{\sqrt{(E''-E)(E''-E')}}{E''} = \frac{e'-e''}{e},$$

et, en posant encore

$$Y = \frac{(E''-E)(E''-E')}{(E-E')^2},$$

on en déduit la relation, bien connue,

$$16yY = 1.$$

Prenant maintenant les formules (68), y mettant des lettres majuscules, au lieu de g_2, g_3, y, ..., puis remplaçant Y par $\frac{1}{16y}$ et y par son ex-

pression en fonction de c^2, on trouve

$$\lambda^2 G_2 = 3(4c^2 + 27),$$
$$\lambda^3 G_3 = c(8c^2 + 81),$$
$$\lambda^6 \Delta = 3^6(c^2 + 9);$$

le coefficient λ a l'expression suivante :

$$\lambda = \frac{81 E''}{4c(E'' - E)(E'' - E')}.$$

Sur un théorème d'Électrodynamique. Note rectificative;

PAR M. P. DUHEM.

Dans un récent Mémoire publié sous ce titre [1], nous avions cru pouvoir démontrer le théorème suivant :

Si l'on connaît l'action qu'un courant fermé et uniforme exerce sur un élément de courant uniforme, et si, de plus, on assujettit la loi élémentaire à satisfaire à la condition que le travail produit dans le déplacement de deux éléments de courant par les actions mutuelles de ces deux éléments dépende uniquement du changement de position relative des deux éléments, la loi élémentaire est absolument déterminée.

Ce théorème n'est pas exact.

Pour s'en convaincre, il suffit d'envisager les diverses lois élémentaires que l'on obtient en donnant diverses valeurs à la constante λ dans la loi de M. Helmholtz; toutes conduisent à la même loi pour l'action d'un courant fermé sur un élément de courant, toutes satisfont à la condition précédente, et cependant elles sont toutes distinctes.

Il est d'ailleurs aisé de voir que notre démonstration contient une faute de raisonnement; nous croyions (p. 389) obtenir des résultats

[1] *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. IV, p. 369; 1888.

nouveaux en écrivant que

$$\int F\cos(F, ds)\,ds' = 0$$

pour tout circuit s, alors que, d'après l'expression donnée (p. 388), $F\cos(F, ds)$ est une différentielle totale par rapport à s', en sorte que la condition précédente est une identité. Cette faute de raisonnement n'est masquée que par des fautes de calcul.

Notre théorème doit donc être rejeté.

Sur le développement de l'expression

$\{R^2 - 2Rr[\cos u \cos u' \cos(x - x') + \sin u \sin u' \cos(y - y')] + r^2\}^{-\frac{1}{2}}$:

PAR M. T.-J. STIELTJES.

---

1. La théorie du potentiel a été étendue à un nombre quelconque de variables par Green. Dans le cas de quatre variables il faut considérer l'expression

$$(1) \qquad T = \frac{1}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2}$$

qui satisfait à l'équation différentielle

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_4^2} = 0.$$

Posons

$$(3) \qquad \begin{cases} x_1 = r\cos u \cos x, & y_1 = R\cos u' \cos x', \\ x_2 = r\cos u \sin x, & y_2 = R\cos u' \sin x', \\ x_3 = r\sin u \cos y, & y_3 = R\sin u' \cos y', \\ x_4 = r\sin u \sin y, & y_4 = R\sin u' \sin y', \end{cases}$$

on aura

$$(4) \qquad T = \frac{1}{R^2 - 2Rr\cos\varphi + r^2}.$$

où

$$(5)\qquad \cos\varphi = \cos u \cos u' \cos(x - x') + \sin u \sin u' \cos(y - y').$$

En développant T suivant les puissances croissantes de r, il vient

$$(6)\qquad T = \sum_0^\infty V_n \frac{r^n}{R^{n+2}}.$$

Ici $V_n = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$ est un polynôme du degré n en $\cos\varphi$, dont on trouve l'expression en écrivant d'abord

$$T = \frac{1}{R^2 - r(2R\cos\varphi - r)} = \sum_0^\infty \frac{r^n(2R\cos\varphi - r)^n}{R^{2n+2}},$$

et en cherchant ensuite le coefficient de r^n,

$$(7)\qquad \begin{cases} V_n = \dfrac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} \\ \quad = (2\cos\varphi)^n - \dfrac{n-1}{1}(2\cos\varphi)^{n-2} + \dfrac{(n-2)(n-3)}{1.2}(2\cos\varphi)^{n-4} - \ldots \end{cases}$$

En introduisant ici au lieu de $\cos\varphi$ sa valeur (5), V_n deviendra un polynôme du degré n en $\cos(x - x')$ et $\cos(y - y')$ qu'on pourra développer suivant les cosinus des multiples de $x - x'$ et $y - y'$. C'est ce développement que nous nous proposons d'obtenir.

2. Cherchons d'abord la transformée de l'équation différentielle (2) après l'introduction des nouvelles variables r, u, x, y.

Les relations (3) donnent facilement

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = dr^2 + r^2 du^2 + r^2\cos^2 u\, dx^2 + r^2 \sin^2 u\, dy^2$$

et de là on conclut, d'après un théorème bien connu de Jacobi,

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 \sin u \cos u \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(r \sin u \cos u \frac{\partial T}{\partial u}\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left(r \operatorname{tang} u \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(r \cot u \frac{\partial T}{\partial y}\right) = 0$$

ou bien

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} & r^2\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + 3r\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} \\ & \quad + 2\cot 2u\frac{\partial T}{\partial u} + \frac{1}{\cos^2 u}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{\sin^2 u}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \end{aligned}\right.$$

En introduisant maintenant au lieu de T le développement (6), on obtient pour V_n la relation

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} & \frac{\partial^2 V_n}{\partial u^2} + 2\cot 2u\frac{\partial V_n}{\partial u} \\ & \quad + \frac{1}{\cos^2 u}\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2} + \frac{1}{\sin^2 u}\frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2} + n(n+2)V_n = 0. \end{aligned}\right.$$

C'est cette équation différentielle linéaire qui permet d'obtenir facilement le développement cherché de V_n suivant les cosinus des multiples de $x - x'$ et de $y - y'$.

5. On reconnaît sans peine, par l'inspection des formules (5) et (7), que ce développement se compose d'une série de termes

$$C\cos i(x - x')\cos k(y - y'),$$

où i, k sont des entiers tels que $n - i - k$ est pair et non négatif. Ensuite on voit que le coefficient C est divisible par

$$(\cos u\cos u')^i(\sin u\sin u')^k$$

et que le quotient est un polynôme en $\sin^2 u$ et $\sin^2 u'$.

Nous posons

$$(10)\qquad V_n = \sum_i{}' \sum_k{}' \tfrac{1}{4} R_{i,k}^n \cos i(x - x')\cos k(y - y'),$$

avec cette convention que, lorsque l'un des indices i, k est égal à zéro, il faudra remplacer le coefficient $\frac{1}{4}$ par 2, et, lorsque $i = k = 0$ (ce qui n'arrive que lorsque n est pair), il faudra remplacer $\frac{1}{4}$ par 1.

En introduisant le développement (10) dans l'équation différen-

tielle (9), on obtient pour $R^n_{i,k}$ l'équation différentielle

$$(11)\qquad \frac{d^2R^n_{i,k}}{du^2} + 2\cot 2u\,\frac{dR^n_{i,k}}{du} + \left[n(n+2) - \frac{i^2}{\cos^2 u} - \frac{k^2}{\sin^2 u}\right] R^n_{i,k} = 0.$$

En posant maintenant

$$R^n_{i,k} = \cos^i u \sin^k u\, S^n_{i,k},$$

$S^n_{i,k}$ sera un polynôme entier en

$$t = \sin^2 u$$

et l'équation (11) nous donne

$$(12)\qquad t(1-t)\frac{d^2S^n_{i,k}}{dt^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)t]\frac{dS^n_{i,k}}{dt} - \alpha\beta S^n_{i,k} = 0,$$

$$(13)\qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{i+k-n}{2}, \\ \beta = \dfrac{i+k+n+2}{2}, \\ \gamma = k+1. \end{cases}$$

On en conclut

$$S^n_{i,k} = C\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 u);$$

α en effet est un nombre entier négatif, en sorte que la série hypergéométrique se réduit à un polynôme.

D'après cela, on doit avoir

$$R^n_{i,k} = C\cos^i u \sin^k u\, \mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 u),$$

C étant indépendant de u. Mais il est clair que le coefficient $R^n_{i,k}$ est symétrique en u et u'; donc

$$(14)\qquad \begin{aligned} R^n_{i,k} = c^n_{i,k}&(\cos u \cos u')^i (\sin u \sin u')^k \\ &\times \mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 u)\,\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 u'), \end{aligned}$$

$c^n_{i,k}$ étant un coefficient numérique qu'il reste à déterminer.

4. Pour cela, posons $u = u'$; on aura

$$\cos\varphi = (1-t)\cos(x-x') + t\cos(y-y'),$$
$$R^n_{i,k} = c^n_{i,k}(1-t)^i t^k \mathfrak{F}^2(\alpha, \beta, \gamma, t),$$

et, à cause de $i + k - 2\alpha = n$, le coefficient de t^n dans $R^n_{i,k}$ est

$$(-1)^i c^n_{i,k}\left[\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta-\alpha-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma-\alpha-1)}\right]^2.$$

Mais, d'autre part, d'après la formule (7), le coefficient de t^n dans V_n est

$$2^n[\cos(y-y') - \cos(x-x')]^n.$$

En posant donc pour simplifier $x' = \pi$, $y' = 0$, on doit avoir

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &2^n(\cos x + \cos y)^n \\ &= \sum_i{}' \sum_k{}' 4c^n_{i,k}\left[\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta-\alpha-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma-\alpha-1)}\right]^2 \cos ix \cos ky. \end{aligned}\right.$$

Mais le développement de

$$2^n(\cos x + \cos y)^n$$

se trouve directement sans difficulté, et le résultat est

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &2^n(\cos x + \cos y)^n \\ &= \sum_i{}' \sum_k{}' 4\,\frac{\Pi(n)\Pi(n)}{\prod\left(\frac{n-i-k}{2}\right)\prod\left(\frac{n+i+k}{2}\right)\prod\left(\frac{n-i+k}{2}\right)\prod\left(\frac{n+i-k}{2}\right)}\cos ix \cos ky. \end{aligned}\right.$$

La comparaison de ces formules (15) et (16) donne la valeur cherchée de $c^n_{i,k}$

$$(17)\quad c^n_{i,k} = \frac{\prod\left(\frac{n-i+k}{2}\right)\prod\left(\frac{n+i+k}{2}\right)}{\prod\left(\frac{n-i-k}{2}\right)\prod\left(\frac{n+i-k}{2}\right)\Pi(k)\Pi(k)}.$$

5. Voici maintenant comment on obtient le développement (16).

On a d'abord

$$2^n(\cos x + \cos y)^n = \sum_r (n)_r (2\cos x)^{n-r}(2\cos y)^r,$$

en posant

$$(n)_r = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r} = \frac{\Pi(n)}{\Pi(r)\,\Pi(n-r)},$$

et comme on a, d'autre part,

$$(2\cos x)^n = \sum_r{}' \, 2(n)_{\frac{n-r}{2}} \cos r\varphi,$$

il vient

$$2^n(\cos x + \cos y)^n = \sum_r \sum_i{}' \sum_k{}' \, 4(n)_r (n-r)_{\frac{n-r-i}{2}} (r)_{\frac{r-k}{2}} \cos ix \cos ky,$$

et, en écrivant

$$2^n(\cos x + \cos y)^n = \sum_i{}' \sum_k{}' \, 4e^n_{i,k} \cos ix \cos ky,$$

on aura

$$e^n_{i,k} = \sum_r (n)_r (n-r)_{\frac{n-r-i}{2}} (r)_{\frac{r-k}{2}},$$

où

$$r = k, \quad k+2, \quad k+4, \quad \ldots, \quad n-i.$$

Soit $\frac{n-i-k}{2} = m$, $\frac{r-k}{2} = s$; l'expression précédente devient

$$e^n_{i,k} = \sum_0^m (n)_{k+2s}(n-k-2s)_{m-s}(k+2s)_s.$$

Mais on voit facilement que

$$\begin{aligned}(n)_{k+2s}(n-k-2s)_{m-s}(k+2s)_s &= (n)_m (m)_s (n-m)_{k+s}, \\ &= (n)_m (m)_s (n-m)_{n-m-k-s},\end{aligned}$$

donc

$$e^n_{i,k} = (n)_m \left[(m)_0 (n-m)_{n-m-k} + (m)_1 (n-m)_{n-m-k-1} + \ldots \right]$$

ou

$$c_{i,k}^n = (n)_m (n)_{n-m-k},$$

ce qui fournit le développement (16).

On voit que $c_{i,k}^n$ est le produit de deux coefficients binomiaux, il en est de même de

$$c_{i,k}^n = (n-m)_k (n-m-i)_k.$$

6. Voici donc le résultat de cette analyse :

$$\{R^2 - 2Rr[\cos u \cos u' \cos(x-x') + \sin u \sin u' \cos(y-y')] + r^2\}^{-1}$$
$$= \sum_0^\infty V_n \frac{r^n}{R^{n+2}},$$
$$V_n = \sum_i{}' \sum_k{}' 4 c_{i,k}^n (\cos u \cos u')^i (\sin u \sin u')^k$$
$$\times \mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 u)\, \mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 u') \cos i(x-x') \cos k(y-y').$$
$$\alpha = \frac{i+k-n}{2},$$
$$\beta = \frac{i+k+n+2}{2},$$
$$\gamma = k+1,$$
$$c_{i,k}^n = \frac{\prod\left(\frac{n-i+k}{2}\right)\prod\left(\frac{n+i+k}{2}\right)}{\prod\left(\frac{n-i-k}{2}\right)\prod\left(\frac{n+i-k}{2}\right)\Pi(k)\,\Pi(k)}.$$

M. Tisserand a obtenu d'abord, dans le tome LXXXIX des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, ce résultat, qu'en posant dans l'expression $\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$,

$$\cos\varphi = \cos^2 u \cos x + \sin^2 u \cos y$$

et en développant suivant les cosinus des multiples de x et de y, le coefficient de $\cos ix \cos ky$ est égal à

$$4 c_{i,k}^n \cos^{2i} u \sin^{2k} u\, \mathcal{F}^2(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 u).$$

Mais la découverte de ce beau résultat a été extrêmement laborieuse, comme on peut le voir par l'analyse compliquée par laquelle M. Tisserand a démontré son résultat.

En réfléchissant sur cette belle formule, nous avons observé d'abord qu'en posant

$$\cos\varphi = \cos u \cos u' \cos x + \sin u \sin u' \cos y,$$

les coefficients devenaient des produits de fonctions analogues en u et u', et nous avons trouvé ensuite dans l'extension de la théorie du potentiel au cas de quatre variables l'origine vraie de cette formule.

Nous observons qu'un point essentiel de notre analyse consiste dans ce changement de variables

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos u \cos x, \\ x_2 &= r\cos u \sin x, \\ x_3 &= r\sin u \cos y, \\ x_4 &= r\sin u \sin y. \end{aligned}$$

Green, Jacobi et d'autres géomètres qui se sont occupés de cette extension de la théorie du potentiel ont introduit d'une autre manière des variables analogues aux coordonnées polaires, en posant

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta_1, \\ x_2 &= r\sin\theta_1 \cos\theta_2, \\ x_3 &= r\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3, \\ x_4 &= r\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3. \end{aligned}$$

7. Il est clair que notre analyse est parfaitement analogue à celle de Laplace concernant la fonction

$$X_n(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\varphi).$$

Il serait facile de poursuivre cette analogie et d'arriver, par exemple, au développement

$$(18) \qquad \mathfrak{F}(u, x, y) = \sum_0^\infty Z^{(n)},$$

où

$$(19)\quad Z^{(n)} = \frac{n+1}{2\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u_1 \cos u_1\, du_1 \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{F}(u_1, x_1, y_1)\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}\, dx_1\, dy_1,$$

$$\cos\varphi = \cos u \cos u_1 \cos(x - x_1) + \sin u \sin u_1 \cos(y - y_1),$$

$\mathcal{F}(u, x, y)$ étant une fonction arbitraire continue, donnée pour les valeurs

$$0 < u < \frac{\pi}{2},$$
$$0 < x < 2\pi,$$
$$0 < y < 2\pi.$$

et telle que

$$\mathcal{F}(0, x, y) \text{ est indépendant de } y,$$
$$\mathcal{F}\left(\frac{\pi}{2}, x, y\right) \text{ est indépendant de } x,$$
$$\mathcal{F}(u, 0, y) = \mathcal{F}(u, 2\pi, y),$$
$$\mathcal{F}(u, x, 0) = \mathcal{F}(u, x, 2\pi).$$

Mais, au lieu d'insister sur ce sujet, nous croyons être plus utile en appelant l'attention sur quelques autres formules.

8. Soit

$$V_n = \cos n\varphi, \qquad \cos\varphi = x.$$

V_n est un polynôme du degré n en x, et

$$(20)\qquad (1 - x^2)\frac{d^2 V_n}{dx^2} - x\frac{dV_n}{dx} + n^2 V_n = 0.$$

En posant

$$x = \cos^2 u + \sin^2 u \cos\psi,$$

on trouve

$$\frac{\partial V_n}{\partial u} = 2\sin u \cos u(\cos\psi - 1)\frac{dV_n}{dx},$$

$$\frac{\partial V_n}{\partial \psi} = -\sin^2 u \sin\psi \frac{dV_n}{dx},$$

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial u^2} = 4\sin^2 u \cos^2 u(\cos\psi - 1)^2 \frac{d^2 V_n}{dx^2} + 2\cos 2u(\cos\psi - 1)\frac{dV_n}{dx},$$

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial \psi^2} = \sin^4 u \sin^2\psi \frac{d^2 V_n}{du^2} - \sin^2 u \cos\psi \frac{dV_n}{dx}.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression

$$\alpha \frac{\partial^2 V_n}{du^2} + \beta \frac{d^2 V_n}{\partial \psi^2}$$

et en déterminant α et β par la condition que le coefficient de $\frac{d^2 V_n}{dx^2}$ soit égal à $1 - x^2$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} \frac{\partial^2 V_n}{\partial u^2} &+ \frac{1}{\sin^2 u} \frac{\partial^2 V_n}{\partial \psi^2} \\ &= (1 - x^2) \frac{d^2 V_n}{dx^2} - \frac{1}{2} (\cos 2u + \cos \psi - \cos 2u \cos \psi) \frac{dV_n}{dx}\end{aligned}$$

et ensuite

$$\frac{1}{4} \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{1}{\sin^2 u} \frac{\partial^2 V_n}{\partial \psi^2} + \frac{1}{4 \sin u \cos u} \frac{\partial V_n}{\partial x} = (1 - x^2) \frac{dV_n}{dx} - x \frac{dV}{dx};$$

donc, d'après (20),

$$(21) \qquad \frac{1}{4} \frac{\partial^2 V_n}{\partial u^2} + \frac{1}{\sin^2 u} \frac{\partial^2 V_n}{\partial \psi^2} + \frac{1}{2 \sin 2u} \frac{\partial V_n}{\partial u} + n^2 V_n = 0.$$

Mais il est clair qu'on peut développer V_n suivant les cosinus des multiples de ψ et en posant

$$(22) \qquad V_n = \sum_i{}' 2 R_i^n \cos i\psi, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

On trouve, en portant ce développement dans l'équation (21),

$$\frac{1}{4} \frac{\partial^2 R_i^n}{\partial u^2} + \frac{1}{2 \sin 2u} \frac{\partial R_i^n}{\partial u} + \left(n^2 - \frac{i^2}{\sin^2 u}\right) R_i^n = 0$$

ou, en posant $R_i^n = (\sin u)^{2i} S_i^n$, $\sin^2 u = t$,

$$(23) \quad t(1 - t) \frac{d^2 S_i^n}{dt^2} + (2i + 1)(1 - t) \frac{dS_i^n}{dt} + (n^2 - i^2) S_i^n = 0;$$

d'où l'on conclut

$$S_i^n = C\mathcal{F}(i-n,\, i+n,\, 2i+1,\, t)$$

et

$$R_i^n = C(\sin u)^{2i}\mathcal{F}(i-n,\, i+n,\, 2i+1,\, \sin^2 u)$$

La détermination de la constante numérique C s'effectue encore sans difficulté en comparant les coefficients de t^n dans la formule (22). On obtient ainsi le résultat

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos\varphi = \cos^2 u + \sin^2 u\cos\psi,\\ &\cos n\varphi = n\sum_i{}' 2\,\frac{\Pi(n+i-1)}{\Pi(n-i)\,\Pi(2i)}\sin^{2i} u\\ &\qquad\times\mathcal{F}(i-n,\, i+n,\, 2i+1,\, \sin^2 u)\cos i\psi. \end{aligned}\right.$$

9. On doit à Hansen un résultat analogue qu'il sera bon de rappeler ici

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &X_n(\cos^2 u\cos x + \sin^2 u\cos y)\\ &\quad = \sum_i{}'\sum_k{}' 4c_{i,k}^n\cos^{2i} u\sin^{2k} u\\ &\qquad\times\mathcal{F}(i+k-n,\, i+k+n+1,\, 2k+1,\, \sin^2 u)\cos ix\cos ky. \end{aligned}\right.$$

L'analyse de Hansen est très compliquée, mais M. Tisserand a fait voir (*Comptes rendus*, t. XCVII, p. 815) qu'on peut obtenir cette formule d'une manière analogue à celle qui vient de nous donner le résultat (24).

Mais, quoiqu'on parvienne ainsi d'une manière élégante à établir ces formules (24), (25), il nous semble pourtant que la véritable origine analytique de ces formules et des expressions

$$\cos^2 u + \sin^2 u\cos\psi,$$

$$\cos^2 u\cos x + \sin^2 u\cos y$$

reste à trouver. Est-il possible d'arriver à ces résultats par une théorie analogue à celle du potentiel? C'est là une question que nous avons cru utile de poser au moins.

Sur le développement des fonctions implicites;

Par M. F. GOMES TEIXEIRA,

Professeur à l'École Polytechnique de Porto, ancien professeur à l'Université de Coïmbre.

Dans une Note *Sur le développement des fonctions implicites*, publiée dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3e série, t. VII, 1881, nous avons présenté une formule pour développer en série ordonnée, suivant les puissances croissantes de x, une fonction u définie par les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} u = f(z), \\ z = t + x\varphi_1(z) + x^2\varphi_2(z) + \ldots + x^k\varphi_k(z), \end{cases}$$

à savoir

$$(2)\qquad \begin{cases} u = f(t) + xf'(t)\varphi_1(t) + \ldots \\ \quad + x^n \sum \dfrac{d^{b-1}\{f'(t)[\varphi_1(t)]^\alpha[\varphi_2(t)]^\beta\ldots[\varphi_k(t)]^\lambda\}}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!\,dt^{b-1}} + \ldots, \end{cases}$$

où la somme $\sum$ se rapporte à toutes les solutions entières positives de l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + k\lambda = n,$$

et où

$$b = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda.$$

De cette question se sont ensuite occupés M. E. Cesaro dans les

Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, t. IV, 1885, et M. David dans le *Journal de l'École Polytechnique*, LVIIe Cahier; 1887.

Nous revenons aujourd'hui sur ce sujet pour déterminer quelle valeur de u doit être considérée comme représentée par la série (2), et pour étudier les conditions de convergence de cette série.

THÉORÈME. — *Soient*

$f(z)$, $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_k(z)$ *des fonctions holomorphes dans l'intérieur d'un contour* K;

t *un point intérieur à ce contour;*

α *une quantité positive assez petite pour que la condition* ($|A|$ représentant le module de A)

$$(3)\qquad \left|\frac{\alpha\varphi_1(z)}{z-t}\right| + \left|\frac{\alpha^2\varphi_2(z)}{z-t}\right| + \ldots + \left|\frac{\alpha^k\varphi_k(z)}{z-t}\right| < 1$$

soit satisfaite le long du contour K. *A chaque valeur de* x, *qui satisfait à la condition* $|x| < \alpha$, *correspond une valeur unique* z_1 *de* z *existant à l'intérieur du contour* K, *et* $f(z_1)$ *est susceptible d'être développée en série ordonnée suivant les puissances croissantes de* x *au moyen de la formule* (2).

En effet, de la condition (3) et de la condition $|x| < \alpha$ on tire

$$\left|\frac{x\varphi_1(z)}{z-t}\right| + \left|\frac{x^2\varphi_2(z)}{z-t}\right| + \ldots + \left|\frac{x^k\varphi_k(z)}{z-t}\right| < 1,$$

et, par conséquent,

$$\left|\frac{x\varphi_1(z) + x^2\varphi_2(z) + \ldots + x^k\varphi_k(z)}{z-t}\right| < 1.$$

Donc, on peut appliquer la série de Lagrange aux équations

$$u = f(z),$$
$$z = t + x\,\mathrm{F}(z),$$

où

$$\mathrm{F}(z) = \varphi_1(z) + x\varphi_2(z) + \ldots + x^{k-1}\varphi_k(z);$$

ce qui donne [1]

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} f(z_1) &= f(t) + x\,\mathrm{F}(t)\,f'(t) + \ldots \\ &\quad + \frac{x^m}{m!}\,\frac{d^{m-1}\{[\mathrm{F}(t)]^m f'(t)\}}{dt^{m-1}} + \mathrm{R}_m, \end{aligned}\right.$$

où

$$\mathrm{R}_m = \int_{\mathrm{K}} \frac{x^{m+1}[\mathrm{F}(z)]^{m+1} f(z)[1 - x\,\varphi_1'(z) - \ldots - x^k\,\varphi_k'(z)]\,dz}{(z-t)^{m+2}\left[1 - \dfrac{x\,\mathrm{F}(z)}{z-t}\right]}.$$

On sait que, pour les valeurs de x considérées, la série (4) est convergente; nous allons faire voir qu'elle est *uniformément* convergente.

L'expression de R_m donne

$$|\mathrm{R}_m| < \int_{\mathrm{K}} \left|\frac{f(z)}{z-t}\right| \left|\frac{x\,\mathrm{F}(z)}{z-t}\right|^{m+1} \frac{\{1 + |x\,\varphi_1'(z)| + \ldots + |x^k\,\varphi_k'(z)|\}\,ds}{\left|1 - \dfrac{x\,\mathrm{F}(z)}{z-t}\right|},$$

mais

$$\begin{aligned} \left|\frac{x\,\mathrm{F}(z)}{z-t}\right| &< \left|\frac{x\,\varphi_1(z)}{z-t}\right| + \left|\frac{x^2\,\varphi_2(z)}{z-t}\right| + \ldots + \left|\frac{x^k\,\varphi_k(z)}{z-t}\right| \\ &< \left|\frac{\alpha\,\varphi_1(z)}{z-t}\right| + \left|\frac{\alpha^2\,\varphi_2(z)}{z-t}\right| + \ldots + \left|\frac{\alpha^k\,\varphi_k(z)}{z-t}\right| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left|1 - \frac{x\,\mathrm{F}(z)}{z-t}\right| &> 1 - \left|\frac{x\,\mathrm{F}(z)}{z-t}\right| \\ &> 1 - \left\{\left|\frac{x\,\varphi_1(z)}{z-t}\right| + \left|\frac{x^2\,\varphi_2(z)}{z-t}\right| + \ldots + \left|\frac{x^k\,\varphi_k(z)}{z-t}\right|\right\} \\ &> 1 - \left\{\left|\frac{\alpha\,\varphi_1(z)}{z-t}\right| + \left|\frac{\alpha^2\,\varphi_2(z)}{z-t}\right| + \ldots + \left|\frac{\alpha^k\,\varphi_k(z)}{z-t}\right|\right\}; \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |\mathrm{R}_m| &< \int_{\mathrm{K}} \left|\frac{f(z)}{z-t}\right| \\ &\times \left\{\left|\frac{\alpha\,\varphi_1(z)}{z-t}\right| + \ldots + \left|\frac{\alpha^k\,\varphi_k(z)}{z-t}\right|\right\}^{m+1} \frac{\{1 + |\alpha\,\varphi_1'(z)| + \ldots + |\alpha^k\,\varphi_k'(z)|\}\,ds}{1 - \left\{\left|\dfrac{\alpha\,\varphi_1(z)}{z-t}\right| + \ldots + \left|\dfrac{\alpha^k\,\varphi_k(z)}{z-t}\right|\right\}}. \end{aligned}$$

---

[1] M. C. Jordan, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 308.

Soient maintenant

M le maximum de $\left|\frac{f(z)}{z-t}\right|$;

M_1 le maximum de

$$1+|\alpha\varphi_1'(z)|+\ldots+|\alpha^k\varphi_k'(z)|;$$

M_2 le maximum de

$$\left|\frac{\alpha\varphi_1(z)}{z-t}\right|+\ldots+\left|\frac{\alpha^k\varphi_k(z)}{z-t}\right|$$

le long du contour K. Nous avons

$$|R_m|<\int_K\frac{MM_1M_2^{m+1}}{1-M_2}\,ds,$$

et, par conséquent, s représentant la longueur du contour K,

$$|R_m|<\frac{MM_1M_2^{m+1}s}{1-M_2}$$

pour toutes les valeurs de x, dont le module est inférieur à α.

Comme $M_2<1$, on voit donc que l'on peut, quelque petite que soit la quantité ε, déterminer m de manière que l'on ait $|R_m|<\varepsilon$ pour toutes les valeurs de x qui satisfont à la condition $|x|<\alpha$.

Donc la série considérée est *uniformément convergente* dans le cercle de rayon α.

Cela posé, si dans la série (4) on pose

$$F(t)=\varphi_1(t)+x\varphi_2(t)+\ldots+x^{k-1}\varphi_k(t),$$

on voit facilement qu'on peut développer chaque terme suivant les puissances de x, et qu'on obtient des polynômes respectivement des degrés $0, k, 2k, \ldots$.

Donc, en vertu d'un théorème bien connu de la théorie des séries [1],

---

[1] M. Weierstrass, *Monatsberichte der k. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1880; *Bulletin des Sciences mathématiques*, p. 160; 1881.

la fonction $f(z_1)$ est susceptible d'être développée en série ordonnée suivant les puissances croissantes de x, et convergente dans le cercle de rayon α.

Le théorème énoncé est donc démontré.

La méthode précédente donne même la série trouvée dans mon article antérieur.

En effet, le terme général de la série (4) est

$$\frac{x^b}{b!}\,\frac{d^{b-1}\{[\varphi_1(t)+\ldots+x^{k-1}\varphi_k(t)]^b f'(t)\}}{dt^{b-1}}$$

ou

$$\frac{x^b}{b!}\,\frac{db^{b-1}\sum\frac{b!\,[\varphi_1(t)]^\alpha[\varphi_2(t)]^\beta\ldots[\varphi_k(t)]^\lambda}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}\,x^{\beta+2\gamma+\ldots+(k-1)\lambda}}{dt^{b-1}},$$

où la somme $\sum$ se rapporte à toutes les solutions entières positives de l'équation

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda=b$$

ou

$$\sum\frac{d^{b-1}\{[\varphi_1(t)]^\alpha[\varphi_2(t)]^\beta\ldots[\varphi_k(t)]^\lambda f'(t)\}}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,dt^{b-1}}\,x^{\alpha+2\beta+\ldots+k\lambda}.$$

Donc le coefficient du terme du degré n dans le développement de $f(z_1)$ en série ordonnée suivant les puissances croissantes de x sera

$$\sum\frac{d^{b-1}\{[\varphi_1(t)]^\alpha[\varphi_2(t)]^\beta\ldots[\varphi_k(t)]^\lambda f'(t)\}}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,dt^{b-1}},$$

où la somme $\sum$ se rapporte à toutes les solutions entières et positives de l'équation

$$\alpha+2\beta+3\gamma+\ldots+k\lambda=n$$

et où

$$b=\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda.$$

Extrait d'une Lettre à M. HERMITE;

PAR M. F. CASPARY.

Berlin, le 18 novembre 1887.

En combinant les nouveaux résultats que vous avez eu la bonté de me communiquer le 6 septembre avec vos anciens, expliqués dans le tome 52 du *Journal de Crelle*, j'ai trouvé qu'il y a une liaison intime et intéressante entre vos recherches et celles de M. Weierstrass. Voici mes remarques :

1. Soit

$$\begin{aligned} f(y) &= \mathfrak{a} y^4 + 4\mathfrak{b} y^3 + 6\mathfrak{c} y^2 + 4\mathfrak{d} y + \mathfrak{e} \\ &= \mathfrak{a}(y-a)(y-b)(y-c)(y-d) \end{aligned}$$

une forme du quatrième degré. En substituant

$$(1) \qquad y = \frac{\alpha s + \beta}{\gamma s + \delta}$$

et en posant

$$(2) \qquad \alpha = a\gamma, \qquad -\frac{1}{4}\mathfrak{a} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2(a-b)(a-c)(a-d)},$$

$$(3) \qquad \frac{b\delta - \beta}{(a-b)\gamma} = e_1, \qquad \frac{c\delta - \beta}{(a-c)\gamma} = e_2, \qquad \frac{d\delta - \beta}{(a-d)\gamma} = e_3,$$

l'expression différentielle $\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}$ se transforme immédiatement dans

l'expression $\frac{ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}$. Si l'on soumet les quantités e_1, e_2, e_3 à la condition

$$(4) \qquad e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

et si l'on pose

$$(5) \qquad e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2 = -\tfrac{1}{4} g_2, \qquad e_1 e_2 e_3 = \tfrac{1}{4} g_3,$$

cette expression différentielle prend la forme $\frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$, qui est exactement celle que vous avez découverte (*Journal de Crelle*, t. 52, p. 8) et que M. Weierstrass a introduite comme forme normale. L'intégrale de cette expression est représentée par la fonction $s = \mathfrak{p}(u)$, dont la découverte est due à cet illustre géomètre.

D'après les formules (3) et (4), on a immédiatement

$$\beta = m\gamma\left(\frac{b}{a-b} + \frac{c}{a-c} + \frac{d}{a-d}\right),$$

$$\delta = m\gamma\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \frac{1}{a-d}\right),$$

et la seconde formule (2) fournit pour le facteur m la valeur

$$m = -\frac{\lambda_0}{12}(a-b)(a-c)(a-d).$$

Donc

$$(6) \qquad y = \frac{a\,\mathfrak{p}(u) - \frac{\lambda_0}{12}(a-b)(a-c)(a-d)\left(\frac{b}{a-b} + \frac{c}{a-c} + \frac{d}{a-d}\right)}{\mathfrak{p}(u) - \frac{\lambda_0}{12}(a-b)(a-c)(a-d)\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \frac{1}{a-d}\right)}.$$

2. On peut donner à la substitution (1) la forme

$$y = \frac{\alpha(s-e_3) + \beta + \alpha e_3}{\gamma(s-e_3) + \delta + \gamma e_3}.$$

Comme les formules (3) fournissent les valeurs suivantes

$$\beta + \alpha e_3 = d(\delta + \gamma e_3), \qquad \delta + \gamma e_3 = \frac{\gamma(a-b)(e_1 - e_3)}{b-d},$$

on a

$$(7) \qquad y = \frac{a(b-d) + d(a-b)\dfrac{e_1 - e_3}{s - e_3}}{(b-d) + (a-b)\dfrac{e_1 - e_3}{s - e_3}}.$$

D'après les formules (3), on trouve

$$e_1 - e_3 = \frac{\lambda_0}{\gamma}(a-c)(d-b), \qquad e_2 - e_3 = \frac{\lambda_0}{\gamma}(a-b)(d-c)$$

et conséquemment

$$(e_2 - e_3):(e_1 - e_3) = (a-b)(c-d):(a-c)(b-d).$$

En posant

$$dl(e_2 - e_3):(e_1 - e_3) = k^2, \qquad \sqrt{e_1 - e_3}\, u = \xi,$$

la formule (7) se transforme, à cause de l'identité

$$s - e_3 dl = \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(\sqrt{e_1 - e_3}\, u, k)},$$

dans la relation suivante

$$(8) \qquad y = \frac{a(b-d) + d(a-b)\operatorname{sn}^2\xi}{b-d + (a-b)\operatorname{sn}^2\xi},$$

qui est exactement la vôtre. En changeant e_3 en e_1 et e_2, on trouve

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} y &= \frac{a(b-d)\operatorname{cn}^2\xi + b(a-d)\operatorname{sn}^2\xi}{(b-d)\operatorname{cn}^2\xi + (a-d)\operatorname{sn}^2\xi} \\ &= \frac{a(a-c)(b-d)\operatorname{dn}^2\xi + c(a-b)(a-d)\operatorname{sn}^2\xi}{(a-c)(b-d)\operatorname{dn}^2\xi + (a-b)(a-d)\operatorname{sn}^2\xi}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on désigne par p et q deux quantités arbitraires, de la formule (8) résulte

$$py + q = \frac{(a-b)(pd+q)\operatorname{sn}^2\xi + (b-d)(pa+q)}{(a-b)\operatorname{sn}^2\xi + b - d}.$$

En comparant cette formule avec la suivante

$$\operatorname{sn}(\xi+\omega)\operatorname{sn}(\xi-\omega) = \frac{\operatorname{sn}^2\xi - \operatorname{sn}^2\omega}{1 - k^2\operatorname{sn}^2\xi\operatorname{sn}^2\omega},$$

on a, pour la détermination des quantités p et q, les relations

$$(a-b)(pd+q) = b-d,$$
$$pa + q = -\operatorname{sn}^2\omega,$$
$$(a-b):(b-d) = -k^2\operatorname{sn}^2\omega,$$

d'où résultent

$$\operatorname{sn}^2\omega = (c-a):(c-d),$$
$$pd + q = -(b-d):(b-a),$$
$$pa + q = -(c-a):(c-d).$$

Par conséquent, on a

$$p = (a-b-c+d):(a-b)(c-d),$$
$$q = (bc-ad):(a-b)(c-d)$$

et

$$(10)\quad y = \frac{ad-bc}{a-b-c+d} + \frac{(a-b)(c-d)}{a-b-c+d}\operatorname{sn}(\xi+\omega)\operatorname{sn}(\xi-\omega),$$

ce qui est votre deuxième relation.

5. On tire immédiatement des formules (3) les relations

$$(11)\quad e_2 - e_3 = -\frac{\lambda}{4}A, \qquad e_3 - e_1 = -\frac{\lambda}{4}B, \qquad e_1 - e_2 = -\frac{\lambda}{4}\Gamma.$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$\begin{aligned} A &= (a-b)(c-d), \\ B &= (a-c)(d-b), \\ \Gamma &= (b-c)(a-d). \end{aligned}$$

A cause de la relation (4) résultent des formules (11) les suivantes

$$(12) \quad e_1 = \frac{\lambda_0}{12}(B-\Gamma), \qquad e_2 = \frac{\lambda_0}{12}(\Gamma - A), \qquad e_3 = \frac{\lambda_0}{12}(A-B),$$

et par conséquent les expressions (5) se transforment ainsi

$$(13) \quad \begin{cases} g_2 = \dfrac{\lambda_0^2}{24}(A^2+B^2+\Gamma^2), \\ g_3 = \dfrac{\lambda_0^3}{16.27}(B-\Gamma)(\Gamma-A)(A-B). \end{cases}$$

Si l'on pose de plus

$$(14) \qquad (e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2(e_1-e_2)^2 = \mathcal{G},$$

on a

$$\mathcal{G} = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27g_3^2) = \frac{\lambda_0^6}{4^6}A^2B^2\Gamma^2.$$

En désignant par $\mathcal{G}_2$ et $\mathcal{G}_3$ les deux invariants de la forme homogène

$$f(y_1 y_2) = \mathcal{A}y_1^4 + 4\mathcal{B}y_1^3y_2 + 6\mathcal{C}y_1^2y_2^2 + 4\mathcal{D}y_1y_2^3 + \mathcal{E}y_2^4,$$

et en supposant que cette forme, par la substitution

$$y_1 = \alpha s_1 + \beta s_2, \qquad y_2 = \gamma s_1 + \delta s_2,$$

se transforme dans la forme homogène

$$h(4s_1^3s_2 - g_2s_1s_2^3 - g_3s_2^4),$$

on a

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)^4\mathcal{G}_2 = h^2g_2, \qquad (\alpha\delta-\beta\gamma)^6\mathcal{G}_3 = h^3g_3.$$

D'autre part, on trouve

$$\frac{dy}{\sqrt{f(y)}} = \frac{y_2 dy_1 - y_1 dy_2}{\sqrt{f(y_1 y_2)}} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\sqrt{h}} \frac{s_2 ds_1 - s_1 ds_2}{\sqrt{4 s_1^3 s_2 - g_2 s_1 s_2^3 - g_3 s_2^4}},$$

et l'on aura les relations introduites au commencement de cette Note, si l'on pose

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \sqrt{h}, \qquad y_1 : y_2 = y; \qquad s_1 : s_2 = s.$$

Donc $\mathcal{G}_2 = g_2$ et $\mathcal{G}_3 = g_3$. En posant de plus $\mathcal{G} = \frac{1}{16}\Delta$, on tire des formules (13) et (14) le résultat suivant

$$(15) \quad \frac{\mathcal{G}_2^3}{(A^2 + B^2 + \Gamma^2)^3} = \frac{27}{2} \frac{\mathcal{G}_3^2}{(B - \Gamma)^2 (\Gamma - A)^2 (A - B)^2} = \frac{1}{54} \frac{\Delta}{A^2 B^2 \Gamma^2} = \frac{\mathcal{G}^6}{2^{13}},$$

qui se transforme si l'on introduit $A : B = -\rho$, $\Gamma : B = \rho - 1$, dans l'équation

$$(16) \quad \frac{\mathcal{G}_2^3}{4(\rho^2 - \rho + 1)^3} = \frac{27\,\mathcal{G}_3^2}{(2 - \rho)^2 (2\rho - 1)^2 (1 + \rho)^2} = \frac{\Delta}{27\rho^2 (1 - \rho)^2} = \frac{16}{27}(e_3 - e_1).$$

En posant $\rho + \frac{1}{\rho} = v + 1$, on a

$$\begin{aligned} \rho^2 + 1 &= \rho(v + 1), \\ \rho^2 - \rho + 1 &= \rho v, \\ \rho^2 - 2\rho + 1 &= \rho(v - 1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et à cause de ces identités la formule (16) se transforme dans la suivante

$$(17) \qquad \frac{\mathcal{G}_2^3}{4v^3} = \frac{27\,\mathcal{G}_3^2}{4v^3 - 27v + 27} = \frac{\Delta}{27(v - 1)},$$

qui prend aussi la forme

$$(18) \qquad 4\Delta v^3 - 27\mathcal{G}_2^3 v + 27\mathcal{G}_2^3 = 0.$$

Les formules (15) à (18) représentent pour $\rho = k^2$ les différentes formes de l'équation du douzième degré que vous avez bien voulu me communiquer. En Géométrie les six valeurs de ρ représentent les six rapports anharmoniques auxquels donnent lieu quatre points situés sur une ligne droite (Chasles, Möbius). Il y a encore quelques relations sur lesquelles je suis tombé en étudiant vos résultats excellents; cependant, pour ne pas abuser de votre indulgence, je termine.

Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications à la Géométrie;

PAR M. G. HUMBERT.

---

1. Dans un Mémoire publié au tome III (4e Série) de ce Journal, nous avons fait connaître une formule simple, qui permet, étant données une courbe algébrique plane et une intégrale abélienne appartenant à cette courbe, de calculer *a priori* la somme des variations de l'intégrale proposée sur les arcs décrits par les points d'intersection de la courbe considérée et d'une courbe algébrique variable, faisant partie d'un faisceau ponctuel.

Cette somme est, comme on le sait, depuis Abel, une fonction algébrique et logarithmique du paramètre du faisceau, et la formule que nous rappelons donne un moyen facile de calculer cette fonction, ou plutôt sa dérivée par rapport au paramètre : on est ramené à une simple évaluation de résidus.

Il n'y aurait presque rien à changer à cette théorie pour passer du cas de la courbe plane à celui d'une courbe gauche : les coordonnées d'un point d'une telle courbe peuvent en effet s'exprimer en fonction fuchsienne d'un même paramètre, et, en partant de ce principe, on n'a qu'à répéter pour la courbe gauche les raisonnements faits pour la courbe plane. La formule fondamentale du Mémoire précité permet ainsi de calculer la somme des variations d'une intégrale abélienne sur les arcs décrits par les points d'intersection d'une courbe gauche et d'une surface algébrique variable appartenant à un faisceau ponctuel.

Au lieu de supposer que la surface variable appartient à un faisceau, on peut considérer le cas plus général où elle fait partie d'un système algébrique : la question se traite d'une manière toute semblable, et l'on arrive à une formule de même nature que celle dont nous venons de parler.

C'est cette nouvelle formule que nous allons tout d'abord démontrer : nous étendrons ainsi aux courbes gauches, en les généralisant notablement, les résultats que nous avons établis pour les courbes planes.

En second lieu, de la formule nouvelle, nous déduirons un certain nombre de conséquences analytiques, dont la plus importante nous permettra de donner une extension du théorème d'Abel aux intégrales doubles et triples, et de retrouver, pour ces intégrales, un certain nombre de propriétés que nous avons rencontrées dans le cas des intégrales abéliennes ordinaires.

Ces développements analytiques constituent la première Partie du présent Mémoire : la deuxième contiendra les applications géométriques, parmi lesquelles nous signalerons celles qui concernent les aires et les courbures sphériques des surfaces algébriques, et les volumes limités par de telles surfaces.

PREMIÈRE PARTIE.

I. — Le théorème d'Abel pour les intégrales dépendant d'une courbe gauche.

2. Soient deux surfaces algébriques

$$f(X, Y, Z) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(X, Y, Z) = 0,$$

de degrés m et n, se coupant suivant une ou plusieurs courbes gauches indécomposables; considérons spécialement l'une de ces courbes que nous désignerons par C.

Les coordonnées X, Y, Z d'un point de C peuvent, d'après un théorème de M. Poincaré, s'exprimer en fonction fuchsienne d'un paramètre λ; ou, si l'on veut, les coordonnées homogènes x, y, z, t d'un point de la courbe $\left(\text{étant posé } X = \frac{x}{t},\ Y = \frac{y}{t},\ Z = \frac{z}{t}\right)$ peuvent se

mettre sous la forme

$$x = \theta_1(\lambda), \qquad y = \theta_2(\lambda), \qquad z = \theta_3(\lambda), \qquad t = \theta_4(\lambda),$$

$\theta_1, \ldots, \theta_4$ désignant des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de la variable λ.

Ces fonctions appartiennent à la première famille de M. Poincaré; le polygone fuchsien correspondant à $4p$ côtés, les côtés opposés sont conjugués deux à deux, et la somme des angles est égale à 2π.

Cela posé, considérons une intégrale abélienne quelconque appartenant à la courbe C,

$$I = \int \frac{Q_1(X, Y, Z)}{S_1(X, Y, Z)} dX,$$

Q_1 et S_1 étant des polynômes entiers. Remplaçons-y X, Y, Z par $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$, et supposons x, y, z, t exprimés en fonction thêtafuchsienne de λ; l'intégrale prend la forme

$$I = \int \frac{Q(x, y, z, t)}{S(x, y, z, t)} (x't - xt') d\lambda,$$

x', t' désignant les dérivées de x et t par rapport à λ. Par suite de la différence des degrés des polynômes Q_1 et S_1 et du facteur $\frac{1}{t^2}$ provenant de la différentielle $d\left(\frac{x}{t}\right)$, il a pu s'introduire, au numérateur ou au dénominateur de l'expression soumise au signe $\int$, un facteur t^h; nous ne le mettrons pas en évidence, le supposant compris dans Q ou dans S, mais alors la différence des degrés en x, y, z, t des polynômes S et Q sera égale à 2.

Nous désignerons par q le degré de Q; celui de S sera $q + 2$.

3. Soit maintenant un système de surfaces algébriques dont l'équation dépend algébriquement d'un paramètre u,

$$\Phi(X, Y, Z, u) = 0$$

ou, en coordonnées homogènes,

$$\Phi(x, y, z, t, u) = 0.$$

Proposons-nous d'évaluer la somme des intégrales I, dont les limites inférieures sont respectivement les arguments des points communs à la courbe C et à une surface

$$\Phi(x, y, z, t, u_0) = 0,$$

et les limites supérieures les arguments des points communs à C et à la surface

$$\Phi(x, y, z, t, u) = 0.$$

Considérons, à cet effet, l'intégrale

$$J = \int \frac{Q(x, y, z, t)}{S(x, y, z, t)} (x't - xt') \frac{\Phi'_u(x, y, z, t, u)}{\Phi(x, y, z, t, u)} d\lambda,$$

x, y, z, t étant toujours supposés exprimés en fonction thètafuchsienne de λ.

La fonction soumise au signe $\int$, c'est-à-dire la fonction que nous désignerons par $\Theta(\lambda)$,

$$\Theta(\lambda) = \frac{Q\Phi'_u}{S\Phi}(x't - xt')$$

est une fonction thètafuchsienne de degré un, car elle peut s'écrire

$$\Theta(\lambda) = \frac{Qt^2}{S} \frac{\Phi'_u}{\Phi} d\left(\frac{x}{t}\right),$$

et, sous cette forme, on voit qu'elle est le produit de trois facteurs, dont les deux premiers sont des fonctions fuchsiennes, comme étant les quotients de deux fonctions thètafuchsiennes de même degré, et dont le troisième est la dérivée d'une fonction fuchsienne, c'est-à-dire une fonction thètafuchsienne de degré un.

Il résulte de là que l'intégrale $\int \Theta(\lambda) d\lambda$, prise le long du polygone

fuchsien fondamental, est nulle : nous n'insistons pas sur cette démonstration qui est, sans aucun changement, celle que nous avons donnée dans le Mémoire mentionné plus haut [1].

On en conclut que la somme des résidus de la fonction $\Theta(\lambda)$ dans l'intérieur du polygone fondamental est nulle : c'est en évaluant ces résidus que nous allons arriver à la formule cherchée.

Les infinis de $\Theta(\lambda)$ sont les zéros de S et ceux de Φ, c'est-à-dire les arguments des points de C situés sur les surfaces $S = 0$ et $\Phi = 0$.

Soit d'abord λ l'argument d'un point de C situé sur la surface

$$\Phi(x, y, z, t, u) = 0;$$

le résidu correspondant ρ a pour valeur

$$\rho = \frac{Q(x, y, z, t)}{S(x, y, z, t)}(x't - xt')\frac{\Phi'_u(x, y, z, t, u)}{\Phi'_\lambda(x, y, z, t, u)}.$$

Or on a, par hypothèse, entre les coordonnées du point considéré, la relation

$$\Phi(x, y, z, t, u) = 0.$$

On en conclut, lorsque l'on passe de la valeur u du paramètre à la valeur $u + du$, que l'argument, λ, du point éprouve une variation définie par l'équation

$$\Phi'_\lambda(x, y, z, t, u)\,d\lambda + \Phi'_u(x, y, z, t, u)\,du = 0;$$

d'où

$$\frac{\Phi'_u}{\Phi'_\lambda} = -\frac{d\lambda}{du}$$

et, par suite,

$$\rho = -\frac{Q}{S}(x't - xt')\frac{d\lambda}{du},$$

ce qu'on peut écrire, en se reportant à la définition de l'intégrale I,

$$\rho = -\frac{dI}{du}.$$

---

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. III, p. 332.

La somme des résidus ρ, changée de signe, est donc égale à la dérivée de la somme cherchée par rapport au paramètre u.

D'après ce qui précède, cette dernière somme est égale à celle des résidus, par rapport aux zéros de S, de la fonction $\Theta(\lambda)$.

On a donc, en désignant par r un de ces résidus,

$$\sum \frac{dI}{du} = \sum r;$$

d'où

$$(1) \qquad \sum I = \int_{u_0}^{u} \left(\sum r \right) du,$$

$\sum r$ désignant la somme des résidus par rapport aux zéros de

$$S(x, y, z, t)$$

de la fonction

$$(2) \qquad \Theta(\lambda) = \frac{Q\Phi'_u}{S\Phi}(x't - xt').$$

C'est l'extension de la formule démontrée dans notre Mémoire sur le théorème d'Abel.

4. *Remarque I.* — Si tous les zéros de S sont simples, c'est-à-dire si la surface $S = 0$ ne touche pas la courbe C, il est aisé d'évaluer les résidus correspondants.

Soit λ l'un de ces zéros; on aura, pour le résidu,

$$r = \frac{Q(x't - xt')}{S'_\lambda \Phi} \Phi'_u;$$

or

$$S'_\lambda = \frac{\partial S}{\partial x} x' + \frac{\partial S}{\partial y} y' + \frac{\partial S}{\partial z} z' + \frac{\partial S}{\partial t} t'.$$

D'ailleurs on a, par la formule des fonctions homogènes,

$$x \frac{\partial S}{\partial x} + y \frac{\partial S}{\partial y} + z \frac{\partial S}{\partial z} + t \frac{\partial S}{\partial t} = (q + 2) S = 0,$$

puisque le point x, y, z, t est sur la surface $S = 0$.

Si l'on tire de cette relation la valeur de S'_t en la portant dans celle de S'_λ, il vient

$$tS'_\lambda = \frac{\partial S}{\partial x}(x't - xt') + \frac{\partial S}{\partial y}(y't - yt') + \frac{\partial S}{\partial z}(z't - zt').$$

D'un autre côté, les quantités $(x't - xt')$, $(y't - yt')$, $(z't - zt')$ sont proportionnelles aux différentielles $d\left(\frac{x}{t}\right)$, $d\left(\frac{y}{t}\right)$, $d\left(\frac{z}{t}\right)$, c'est-à-dire aux cosinus directeurs de la tangente à la courbe C au point $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$; ces cosinus, puisque C est à l'intersection des surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, sont eux-mêmes proportionnels aux fonctions

$$f'_y\varphi'_z - f'_z\varphi'_y, \qquad f'_z\varphi'_x - f'_x\varphi'_z, \qquad f'_x\varphi'_y - f'_y\varphi'_x,$$

et l'on a dès lors

$$r = \frac{Q(f'_y\varphi'_z - f'_z\varphi'_y)}{\Delta_{S f\varphi}\Phi}\Phi'_u = \sigma\frac{\Phi'_u}{\Phi},$$

en posant

$$(3) \qquad \sigma = \frac{Q(f'_y\varphi'_z - f'_z\varphi'_y)}{\Delta_{S f\varphi}},$$

et en désignant par $\Delta_{S f\varphi}$ le déterminant

$$\Delta_{S f\varphi} = \begin{vmatrix} S'_x & S'_y & S'_z \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \end{vmatrix}.$$

Il vient donc

$$(4) \qquad \sum I = \sum \int_{u_0}^{u} r\,du$$

ou, puisque Q et S sont indépendants de u,

$$\sum I = \sum \sigma \log \frac{\Phi(x, y, z, t, u)}{\Phi(x, y, z, t, u_0)};$$

la somme du second membre étant étendue aux points communs à la

courbe C et à la surface $S = 0$, et σ étant défini, en chacun de ces points, par la relation (3), c'est-à-dire $\sigma = \frac{Q(f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y)}{\Delta_{S/\varphi}}$. On peut dire aussi que σ est le résidu, au point considéré, de la fonction $\Theta_1(\lambda) = \frac{Q}{S}(x't - xt')$.

5. *Remarque II.* — L'intégration par rapport à u de la quantité Σr, qui figure dans la formule (1), est tout aussi aisée si l'on suppose que $S(x, y, z, t)$ admette des zéros multiples. Soit, en effet, λ un zéro d'ordre h de S; écrivons $\Theta(\lambda)$ sous la forme

$$\Theta(\lambda) = \frac{Q(x't - xt')}{S} \frac{\Phi'_u}{\Phi}.$$

Le résidu de $\Theta(\lambda)$, correspondant au zéro considéré, sera de la forme

$$r = \mathcal{A} \frac{\Phi'_u}{\Phi} + \mathcal{B} \frac{d}{d\lambda} \frac{\Phi'_u}{\Phi} + \ldots + \mathcal{L} \frac{d^{h-1}}{d\lambda^{h-1}} \frac{\Phi'_u}{\Phi},$$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots, \mathcal{L}$ étant indépendants de u, puisque Q et S le sont eux-mêmes, et l'intégrale correspondante, $\int r\,du$, sera

$$\int \mathcal{A} \frac{\Phi'_u}{\Phi} du + \int \mathcal{B} \frac{d}{d\lambda} \frac{\Phi'_u}{\Phi} du + \ldots + \int \mathcal{L} \frac{d^{h-1}}{d\lambda^{h-1}} \frac{\Phi'_u}{\Phi} du.$$

La première intégrale est $\mathcal{A} \log \Phi$; une quelconque des autres se calculera par la formule

$$\int \frac{d^k}{d\lambda^k} \frac{\Phi'_u}{\Phi} du = \frac{d^k}{d\lambda^k} \int \frac{\Phi'_u}{\Phi} du = \frac{d^k}{d\lambda^k} \log \Phi.$$

6. La formule (1) montre que la somme des intégrales I sera nulle lorsque Σr sera lui-même nul. Ce cas se présente, en particulier, si la fonction $\Theta(\lambda)$ ne devient infinie pour aucun des zéros de S, parce que tous les résidus r sont alors nuls.

Comme exemple, supposons que les surfaces $\Phi = 0$ forment un fais-

ceau ponctuel $\Phi_0 + u\Phi_1 = 0$; Φ'_u est alors égal à Φ_1 et la fonction $\Theta(\lambda)$ devient

$$\Theta(\lambda) = \frac{Q\Phi_1(x't - xt')}{S(\Phi_0 + u\Phi_1)}. \tag{5}$$

Elle n'aura pas d'autres infinis que les zéros de $\Phi_0 + u\Phi_1$, si Φ_1 s'annule pour tous les zéros de S qui n'annulent pas $Q(x't - xt')$. De là résulte cette proposition que nous avons énoncée déjà dans le cas des courbes planes [1].

Soit I *une intégrale abélienne, relative à une courbe gauche algébrique* C. *La somme des intégrales* I, *dont les limites inférieures et supérieures sont respectivement les systèmes de valeurs des coordonnées qui correspondent aux points d'intersection de la courbe* C *avec deux surfaces quelconques de même degré, est nulle, si, parmi les surfaces du faisceau ponctuel déterminé par les surfaces sécantes, il en est une,* Σ, *qui passe par tous les points de la courbe* C *rendant l'intégrale infinie.*

Si la quantité sous le signe $\int$ *devient infinie d'ordre* h *en un point de* C, *la surface* Σ *doit avoir au même point avec* C *un contact d'ordre* $h - 1$.

On suppose que *toutes* les surfaces du faisceau considéré ne passent pas par un de ces points, sinon $\Theta(\lambda)$ pourrait devenir infini en ce point, comme le montre l'expression (5).

7. Si les surfaces $\Phi = 0$ forment un système algébrique quelconque, on arrive à un résultat analogue.

Soit

$$\Phi(x, y, z, t, u) = u^\rho A + u^{\rho-1} B + \ldots + K u + L.$$

Pour que $\Theta(\lambda)$ reste fini aux points de la courbe qui annulent S, il faut, d'après (2), que Φ'_u s'annule en ces points, quel que soit u, c'est-à-dire que l'on ait en chacun d'eux $A = B = \ldots = K = 0$.

Cela montre qu'une seule et même surface du système $\Phi = 0$ passe par tous ces points; cette surface est la surface $L = 0$.

---

[1] *Loc. cit.*, p. 338.

Cette condition nécessaire est évidemment suffisante, et l'on peut dire que :

La somme des intégrales I *dont les limites inférieures et supérieures sont respectivement les systèmes de valeurs des coordonnées qui correspondent aux points d'intersection de la courbe* C *avec deux surfaces quelconques d'un système algébrique à un paramètre est nulle, si les surfaces de ce système qui passent respectivement par les points de la courbe* C, *rendant l'intégrale infinie, se réduisent à une seule et même surface du système.*

8. Un autre cas particulier intéressant est celui où, S n'ayant que des zéros multiples, la fonction Φ'_u a, quel que soit u, les mêmes zéros, à un ordre de multiplicité inférieur.

Supposons d'abord que l'on ait $\Phi = \Phi_0 + u\Phi_1$; $\Theta(\lambda)$ est encore donné par la formule (5).

Soit λ_0 un zéro d'ordre h de S : le résidu correspondant de Θ est, comme on l'a vu au n° 5, de la forme

$$r = \mathcal{A}\frac{\Phi_1}{\Phi} + \mathcal{B}\frac{d}{d\lambda}\frac{\Phi_1}{\Phi} + \ldots + \mathcal{L}\frac{d^{h-1}}{d\lambda^{h-1}}\frac{\Phi_1}{\Phi}.$$

La fonction Φ_1 s'annule pour la valeur λ_0 par hypothèse; supposons que λ_0 soit pour cette fonction un zéro d'ordre k. Les fonctions $\frac{\Phi_1}{\Phi}$, $\frac{d}{d\lambda}\frac{\Phi_1}{\Phi}$, ..., $\frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}}\frac{\Phi_1}{\Phi}$ s'annuleront dans l'expression de r; on aura ensuite :

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\frac{\Phi_1}{\Phi} = \frac{1}{\Phi}\frac{d^k}{d\lambda^k}\Phi_1,$$

$$\frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}}\frac{\Phi_1}{\Phi} = \frac{1}{\Phi}\frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}}\Phi_1 + (k+1)\frac{d}{d\lambda}\frac{1}{\Phi}\frac{d^k}{d\lambda^k}\Phi_1,$$

. . . . . .

Si l'on remplace Φ par $\Phi_0 + u\Phi_1$, on voit que, pour $\lambda = \lambda_0$, u disparaît dans les dénominateurs Φ, Φ^2, ... de ces expressions; pour qu'il apparaisse au numérateur, dans une des dérivées $\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\Phi}$, c'est-à-dire

$\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\Phi_0 + u\Phi_1}$, il faut que p soit au moins égal à k, puisque les dérivées de Φ_1 s'annulent pour $\lambda = \lambda_0$ jusqu'à l'ordre $k-1$ inclus.

Il en résulte que les dérivées de $\frac{\Phi_1}{\Phi}$, jusqu'à l'ordre $h-1$ inclus, seront indépendantes de u, pour $\lambda = \lambda_0$, si l'on a

$$h - 1 - k \leqq k - 1,$$

c'est-à-dire

$$h \leqq 2k.$$

Si, au contraire, $h - 1 - k = k$, c'est-à-dire si $h = 2k + 1$, u apparaîtra au premier degré au numérateur de $\frac{d^{h-1}}{d\lambda^{h-1}}\frac{\Phi_1}{\Phi}$; et, en général, on voit aisément, en discutant la forme des dérivées successives de $\frac{1}{\Phi}$, que u n'apparaîtra pas au second degré dans les numérateurs si l'on a

$$h \leqq 3k,$$

et ainsi de suite.

Le résidu r sera donc un polynôme entier en u; il sera de degré zéro si h est inférieur ou égal à $2k$, de degré 1 si h est compris entre $2k+1$ et $3k$, de degré 2 si h est compris entre $3k+1$ et $4k$, et ainsi de suite.

Nous pouvons énoncer maintenant la proposition suivante :

Soit I *une intégrale abélienne relative à une courbe plane ou gauche algébrique* C, *et telle que la quantité sous le signe* $\int$ *n'ait que des infinis d'ordre de multiplicité supérieur à un. La somme des intégrales* I *dont les limites inférieures et supérieures sont respectivement les systèmes de valeurs des coordonnées qui correspondent aux points d'intersection de la courbe* C *avec deux surfaces quelconques d'un faisceau ponctuel,* $\Phi_0 + u_0\Phi_1 = 0$, $\Phi_0 + u\Phi_1 = 0$ *s'exprimera par un polynôme entier en* u_0 *et* u *si la surface* $\Phi_1 = 0$ *passe par tous les points de la courbe* C *rendant l'intégrale infinie, quel que soit d'ailleurs l'ordre du contact qu'elle ait en ces points avec* C.

Le degré du polynôme entier se calculera aisément par ce qui précède.

9. On a une proposition tout à fait analogue dans le cas où les surfaces $\Phi = 0$ forment un système algébrique quelconque.

La somme des intégrales I prises sur la courbe C, entre les points d'intersection de cette courbe avec deux surfaces $\Phi(x, y, z, t, u_0) = 0$ et $\Phi(x, y, z, t, u) = 0$, sera encore exprimable par un polynôme entier en u_0 et u, si Φ'_u s'annule, quel que soit u, pour les points de la courbe C qui rendent l'intégrale infinie.

Soit toujours

$$\Phi = u^p A + u^{p-1} B + \ldots + K u + L;$$

il faudra, pour cela, que les surfaces

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad \ldots, \qquad K = 0$$

passent toutes par les points considérés.

Nous n'insisterons pas davantage sur les conséquences analytiques qu'on pourrait déduire de ces résultats; nous nous bornerons, au point de vue des applications géométriques, à développer le cas où l'intégrale abélienne considérée est de seconde espèce, et, en particulier, celui où elle est la dérivée d'une fonction rationnelle.

II. — Application aux fonctions rationnelles et aux intégrales de seconde espèce.

10. Soit une fonction rationnelle quelconque de x, y, z, t

$$U = \frac{Q(x, y, z, t)}{S(x, y, z, t)},$$

Q et S désignant des polynômes homogènes en x, y, z, t, de même degré, q : cette hypothèse ne restreint pas la généralité, car nous supposerons toujours qu'on a mis en facteur, au numérateur ou au dénominateur, une puissance de t convenable, de manière à réaliser la condition indiquée.

La formule fondamentale (1) permet de calculer la somme des valeurs que prend la fonction U, aux points communs à la courbe gauche C

et aux surfaces $\Phi(x, y, z, t, u) = 0$; il suffit en effet d'appliquer cette formule à l'intégrale

$$I = \int \frac{dU}{d\lambda} d\lambda,$$

en supposant toujours les coordonnées des points de C exprimées en fonction thêtafuchsienne de λ.

On a ainsi

$$\Sigma U = \Sigma \int r\, du,$$

r désignant le résidu de la fonction

$$\Theta(\lambda) = \frac{dU}{d\lambda} \frac{\Phi'_u}{\Phi},$$

par rapport à un quelconque des infinis de $\Theta(\lambda)$ qui ne sont pas des zéros de Φ, c'est-à-dire par rapport à un zéro de S.

Soit λ_0 un de ces zéros, supposé simple. On a, dans le voisinage de la valeur λ_0,

$$U = \frac{\mathcal{A}}{\lambda - \lambda_0} + \mathcal{B} + \mathcal{C}(\lambda - \lambda_0) + \ldots,$$

$$\frac{dU}{d\lambda} = -\frac{\mathcal{A}}{(\lambda - \lambda_0)^2} + \mathcal{C} + \ldots.$$

et, par suite, il vient, pour le résidu r de $\Theta(\lambda)$,

$$r = -\mathcal{A} \frac{d}{d\lambda} \frac{\Phi'_u}{\Phi}.$$

On a donc

$$\int_{u_0}^{u} r\, du = -\left[\mathcal{A} \frac{d}{d\lambda} \log \Phi\right]_{u_0}^{u} = -\left[\mathcal{A} \frac{\Phi'_\lambda}{\Phi}\right]_{u_0}^{u},$$

et la formule qui donne ΣU devient

$$[\Sigma U]_{u_0}^{u} = -\Sigma \left[\mathcal{A} \frac{\Phi'_\lambda}{\Phi}\right]_{u_0}^{u},$$

la somme du second membre étant étendue aux points communs à la courbe C et à la surface $S = 0$.

Il est aisé de transformer cette formule.

On a, en effet, puisque λ_0 est le résidu de $U = \frac{Q}{S}$, pour $\lambda = \lambda_0$,

$$\lambda_0 = \frac{Q}{S'_\lambda}$$

et, par suite,

$$\frac{\lambda_0 \Phi'_\lambda}{\Phi} = \frac{Q}{\Phi} \frac{\Phi'_\lambda}{S'_\lambda}.$$

Or

$$S'_\lambda = \frac{\partial S}{\partial x} x' + \frac{\partial S}{\partial y} y' + \frac{\partial S}{\partial z} z' + \frac{\partial S}{\partial t} t',$$

et, puisque le point x, y, z, t est sur la surface $S = 0$,

$$0 = \frac{\partial S}{\partial x} x + \frac{\partial S}{\partial y} y + \frac{\partial S}{\partial z} z + \frac{\partial S}{\partial t} t,$$

d'où

$$t S'_\lambda = \frac{\partial S}{\partial x}(x't - xt') + \frac{\partial S}{\partial y}(y't - yt') + \frac{\partial S}{\partial z}(z't - zt').$$

De même

$$\Phi'_\lambda = \frac{\partial \Phi}{\partial x} x' + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z + \frac{\partial \Phi}{\partial t} t',$$

et, si p est le degré de Φ,

$$p\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z + \frac{\partial \Phi}{\partial t} t,$$

d'où, en éliminant $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ entre les deux dernières relations,

$$t\Phi'_\lambda = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x't - xt') + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(y't - yt') + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z't - zt') + pt'\Phi.$$

Il vient ainsi

$$\frac{\lambda_0 \Phi'_\lambda}{\Phi} = \frac{Q\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x't - xt') + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z't - zt')\right]}{\Phi\left[\frac{\partial S}{\partial x}(x't - xt') + \ldots\right]} + p\frac{Q}{S'_\lambda} t'.$$

La quantité $\frac{pQ}{S'_\lambda} t'$ est indépendante de u; prise entre u_0 et u, elle donne

donc un résultat nul, et il reste

$$\left[\sum U\right]_{u_0}^{u} = -\sum \left\{ \frac{Q}{\Phi} \frac{\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x't - xt') + \ldots\right]}{\left[\frac{\partial S}{\partial x}(x't - xt') + \ldots\right]} \right\}_{u_0}^{u}.$$

Remplaçant $x't - xt', \ldots$ par les valeurs proportionnelles, introduites déjà plus haut, $f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y$, et désignant par $\Delta_{Sf\varphi}$ le déterminant

$$\Delta_{Sf\varphi} = \begin{vmatrix} S'_x & S'_y & S'_z \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \end{vmatrix},$$

on arrive à la formule exprimée par le théorème suivant :

Soit $\frac{Q(x,y,z,t)}{S(x,y,z,t)}$ *une fonction rationnelle de degré zéro en* x, y, z, t; *la somme des valeurs que prend cette fonction aux points communs à une courbe gauche* C, *et à une surface algébrique* $\Phi = 0$, *est donnée par la formule*

$$\sum \frac{Q}{S} = -\sum \frac{Q}{\Phi} \frac{\Delta_{\Phi f\varphi}}{\Delta_{Sf\varphi}} + \text{const.},$$

la constante étant indépendante des coefficients de la surface $\Phi = 0$, *et la somme du second membre étant étendue aux points communs à la courbe* C *et à la surface* $S = 0$.

On suppose toutefois que cette courbe et cette surface ne sont tangentes en aucun de leurs points communs.

Cette formule met en évidence la manière dont les coefficients de la surface variable, $\Phi = 0$, entrent dans la somme cherchée; sans y insister davantage, nous tirerons de ce qui précède l'extension aux surfaces de propriétés simples indiquées par nous dans le cas des courbes planes.

11. Nous avons trouvé, pour un résidu r de la fonction

$$\Theta(\lambda) = \frac{dU}{d\lambda} \frac{\Phi'_u}{\Phi}$$

correspondant à un zéro λ_0 de S, supposé simple, la relation

$$r = -\lambda_0 \frac{d}{d\lambda} \frac{\Phi'_u}{\Phi} = -\lambda_0 \frac{d}{du} \frac{\Phi'_\lambda}{\Phi}.$$

Il résulte de là que r sera nul si $\frac{\Phi'_\lambda}{\Phi}$ est indépendant de u, pour $\lambda = \lambda_0$.

Or soit

$$\Phi = u^\rho A + u^{\rho-1} B + \ldots + L,$$

A, B, ..., L étant des polynômes en x, y, z, t.

On a

$$\Phi'_\lambda = u^\rho A'_\lambda + u^{\rho-1} B'_\lambda + \ldots + L.$$

Pour que $\frac{\Phi'_\lambda}{\Phi}$ ne dépende pas de u, il faut et il suffit qu'on ait, pour $\lambda = \lambda_0$,

$$\frac{A'_\lambda}{A} = \frac{B'_\lambda}{B} = \ldots = \frac{L'_\lambda}{L}.$$

Ces relations peuvent s'interpréter géométriquement d'une manière simple; elles signifient que toutes les surfaces du système

$$\Phi(x, y, z, t, u) = 0,$$

qui passent par le point d'argument λ_0 sur la courbe C, sont tangentes à cette courbe en ce point.

Si donc cette condition est vérifiée pour tous les points communs à C et à la surface $S = 0$, les résidus r seront nuls, et par suite la fonction ΣU sera constante.

En d'autres termes, si l'on suppose que la surface $S = 0$ ne touche en aucun point la courbe C, la somme $\sum \frac{Q}{S}$, étendue aux points communs à cette courbe et à chacune des surfaces du système

$$\Phi(x, y, z, t, u) = 0,$$

sera indépendante du paramètre u, si toutes les surfaces du système qui passent par les points communs à la surface $S = 0$ et à la courbe C touchent cette courbe en ces points.

Cette proposition peut s'étendre aisément au cas où la surface $S = 0$ a, en un ou plusieurs points, un contact d'un ordre quelconque avec la courbe C.

Supposons en effet que la surface $S = 0$ ait avec la courbe C, en un point d'argument λ_0, un contact d'ordre $h - 1$, et admettons, pour plus de généralité, que la surface $Q = 0$ passe aussi par ce point et qu'elle y ait, avec la courbe, un contact d'ordre $k - 1$.

On aura, dans le voisinage de la valeur λ_0 du paramètre λ,

$$U = \frac{Q}{S} = \frac{\mathfrak{A}}{(\lambda - \lambda_0)^{h-k}} + \frac{\mathfrak{B}}{(\lambda - \lambda_0)^{h-k-1}} + \ldots + \frac{\mathfrak{L}}{\lambda - \lambda_0} + \mathfrak{M} + \ldots.$$

Le résidu r de la fonction

$$\Theta(\lambda) = \frac{dU}{d\lambda}\frac{\Phi'_u}{\Phi},$$

pour la valeur λ_0, sera

$$r = -\mathfrak{L}\frac{d}{d\lambda}\frac{\Phi'_u}{\Phi} - \ldots - (h-k-1)\mathfrak{B}\frac{d^{h-k-1}}{d\lambda^{h-k-1}}\frac{\Phi'_u}{\Phi} - (h-k)\mathfrak{A}\frac{d^{h-k}}{d\lambda^{h-k}}\frac{\Phi'_u}{\Phi},$$

ce qu'on peut écrire

$$r = -\mathfrak{L}\frac{d}{du}\frac{\Phi'_\lambda}{\Phi} - \ldots - (h-k)\mathfrak{A}\frac{d}{du}\frac{d^{h-k-1}}{d\lambda^{h-k-1}}\frac{\Phi'_\lambda}{\Phi}.$$

Cette valeur sera nulle si la quantité $\frac{\Phi'_\lambda}{\Phi}$ et ses dérivées par rapport à λ, jusqu'à l'ordre $h - k - 1$, sont indépendantes de u, pour $\lambda = \lambda_0$.

Or on a

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\Phi'_\lambda}{\Phi} = \frac{\Phi''_\lambda}{\Phi} - \frac{\Phi'^2_\lambda}{\Phi^2},$$

et, si l'on suppose que $\frac{\Phi'_\lambda}{\Phi}$ est indépendant de u, il faut et il suffit, pour que le premier membre le soit également, que $\frac{\Phi''_\lambda}{\Phi}$ ne dépende pas de u.

On voit de même que, pour que $\frac{d^2}{d\lambda^2}\frac{\Phi'_\lambda}{\Phi}$ soit indépendant de u, il faut et il suffit, les conditions précédentes étant supposées remplies, que $\frac{\Phi'''_\lambda}{\Phi}$ ne dépende pas de u; et ainsi de suite.

En résumé, v sera nul si les quantités

$$\frac{\Phi'_\lambda}{\Phi}, \quad \frac{\Phi''_\lambda}{\Phi}, \quad \ldots, \quad \frac{\Phi_\lambda^{(h-k)}}{\Phi}$$

sont indépendantes de u quand on y fait $\lambda = \lambda_0$.

Soit toujours posé

$$\Phi = u^\rho A + u^{\rho-1} B + \ldots + L,$$

on a

$$\Phi'_\lambda = u^\rho A'_\lambda + \ldots\ldots\ldots\ldots + L'_\lambda,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{\Phi'_\lambda}{\Phi}, \frac{\Phi''_\lambda}{\Phi}, \cdots$ soient indépendants de u est que les équations en u, de degré ρ,

$$\Phi = 0, \qquad \Phi'_\lambda = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi_\lambda^{(h-k)} = 0,$$

aient les mêmes racines, quand on y fait $\lambda = \lambda_0$.

Soit u_0 une racine de l'équation $\Phi = 0$; dire qu'elle annule aussi $\Phi'_\lambda = 0$, c'est dire que la surface $\Phi(x, y, z, t, u_0)$, qui passe par le point d'argument λ_0 sur la courbe C, touche cette courbe en ce point; si u_0 annule aussi Φ''_λ, c'est que la surface $\Phi(x, y, z, t, u_0)$ a, au même point, un contact du second ordre avec la courbe, et ainsi de suite.

Il en résulte que la surface $\Phi(x, y, z, t, u_0)$ a, au point λ_0, un contact d'ordre $h - k$ avec la courbe C, et, par suite, la fonction $\frac{\Phi(x, y, z, t, u_0)}{\mu^p} \frac{Q(x, y, z, t)}{S(x, y, z, t)}$ s'annule en ce point, en désignant par μ une fonction linéaire quelconque de x, y, z, t, ne s'annulant pas au point considéré, et introduite pour l'homogénéité.

Ainsi la somme $\sum \frac{Q}{S}$, étendue aux points communs à la courbe C et à chacune des surfaces du système $\Phi(x, y, z, t, u) = 0$, sera indépendante de u si, en chaque point de la courbe C rendant la fonction $\frac{Q}{S}$ infinie, les surfaces du système passant par ce point

$$\Phi(x, y, z, t, u_0) = 0, \qquad \Phi(x, y, z, t, u_1) = 0, \qquad \ldots$$

sont telles que les fonctions $\frac{\Phi(x, y, z, t, u_0)\,Q(x, y, z, t)}{\mu^p\,S(x, y, z, t)}$, ... s'annulent au point considéré.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, qui est une généralisation de celui que nous avons démontré dans le cas des courbes planes.

La somme des valeurs que prend une fonction rationnelle, $\frac{Q(x, y, z, t)}{S(x, y, z, t)}$ *homogène et de degré zéro, aux points communs à une courbe gauche algébrique* C *et à chacune des surfaces d'un système algébrique de degré* p, $\Phi(x, y, z, t, u) = 0$, *dont l'équation renferme un paramètre variable* u, reste constante, *si les surfaces de ce système,* $\Phi(x, y, z, t, u_i) = 0$, *qui passent respectivement par les points de la courbe* C *rendant la fonction* $\frac{Q}{S}$ *infinie, sont telles qu'en chacun de ces points les fonctions* $\frac{\Phi(x, y, z, t, u_i)}{\mu^p}\,\frac{Q(x, y, z, t)}{S(x, y, z, t)}$ *s'annulent,* μ *étant une fonction linéaire quelconque de* x, y, z, t *ne s'annulant en aucun des points considérés.*

Géométriquement, cela revient à dire que *les surfaces*

$$\Phi(x, y, z, t, u_i) = 0$$

ont, en chacun des points considérés, avec la courbe C, *un contact d'ordre supérieur au contact de cette courbe avec la surface* $S = 0$, et même, dans le cas où la surface $Q = 0$ passe par le point, il suffit que le contact de la courbe C et des surfaces $\Phi = 0$ soit d'ordre supérieur à la différence entre les ordres des contacts de la courbe avec les surfaces $S = 0$ et $Q = 0$.

12. Ce théorème s'étend immédiatement aux *intégrales abéliennes de seconde espèce,* puisque toute la démonstration repose sur ce fait que, dans le développement de la fonction $\frac{dU}{d\lambda}$ au voisinage d'un de ses infinis, λ_0, il n'existe pas de terme en $\frac{1}{\lambda - \lambda_0}$; on peut donc énoncer la proposition suivante :

Soit I *une intégrale abélienne de seconde espèce appartenant à*

une courbe gauche C. *La somme des intégrales* I, *dont les limites inférieures et supérieures sont respectivement les systèmes de valeurs des coordonnées* x, y, z, t, *qui correspondent aux points d'intersection de la courbe* C *avec deux surfaces quelconques du système* $\Phi(x, y, z, t, u) = 0$, *est nulle, si les surfaces de ce système* $\Phi(x, y, z, t, u_i) = 0$, *qui passent respectivement par les points de la courbe* C *rendant l'intégrale* I *infinie, sont telles qu'en chacun de ces points les fonctions* $\frac{\Phi(x, y, z, t, u_i)}{\mu^p}$ I *s'annulent.*

On peut dire aussi qu'en ces points les fonctions

$$\frac{\Phi(x, y, z, t, u_i)}{\mu^p} \frac{dI}{d\left(\frac{x}{t}\right)}$$

doivent rester finies.

15. On peut étendre le théorème du n° **11** au cas où la courbe C est variable dans l'espace, et énoncer à cet égard la proposition suivante, qui se déduit sans difficulté de ce qui précède :

La somme des valeurs que prend une fonction rationnelle

$$\frac{Q(x, y, z, t)}{S(x, y, z, t)},$$

homogène et de degré zéro, aux points communs à trois surfaces algébriques,

$$f(x, y, z, t, u) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, t, v) = 0, \qquad \psi(x, y, z, t, w) = 0,$$

est indépendante des paramètres u, v, w, *dans le cas suivant :*

Soient $f_1, f_2, \ldots; \varphi_1, \varphi_2, \ldots; \psi_1, \psi_2, \ldots$ *les surfaces de chacun des trois systèmes qui passent par un même point,* A, *situé sur la surface* $S = 0$: *il faudra d'abord qu'elles admettent en* A *une même tangente commune* T.

Soient de plus (f_i, φ_j), (f_i, ψ_k), (φ_j, ψ_k) *les courbes communes à deux de ces surfaces, de système différent; il faudra que les courbes de ces trois séries aient entre elles, au point* A, *un contact d'un ordre supérieur au contact de l'une quelconque d'entre elles, en ce même point, avec la surface* $S = 0$.

Dans le cas où la surface $S = 0$ est une surface simple, c'est-à-dire, si S n'est pas la puissance d'un polynôme Σ, la seconde condition est remplie d'elle-même si la première est vérifiée, pourvu toutefois que la tangente T ne touche pas S. Si T touche S au point A, il faudra que les courbes (f, φ), (f, ψ), (φ, ψ) soient osculatrices entre elles en ce point, etc.

Le théorème s'applique en particulier si l'équation $f = 0$ ne renferme pas de paramètre variable : il peut alors s'énoncer un peu plus simplement.

La somme des valeurs que prend la fonction $\frac{Q}{S}$ *aux points communs à une surface fixe* $f = 0$, *et à deux surfaces mobiles*

$$\varphi(x, y, z, t, v) = 0, \qquad \psi(x, y, z, t, w) = 0,$$

est indépendante des paramètres v *et* w, *si, toutes les fois qu'un de ces points vient à coïncider avec un point* A, *situé sur la surface* $S = 0$, *les surfaces des systèmes mobiles* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \psi_1, \psi_2, \ldots$, *passant par* A, *sont telles que les courbes* (φ_j, ψ_k) *aient en ce point avec la surface* $f = 0$ *un contact d'ordre supérieur au contact de l'une quelconque d'entre elles avec la surface* $S = 0$.

14. Le produit des valeurs que prend une fonction rationnelle homogène et de degré zéro, $\frac{Q}{S}$, aux points communs à la courbe C et à chacune des surfaces du système $\Phi(x, y, z, t, u) = 0$, donne également lieu à quelques remarques intéressantes.

Soit $\prod_u \frac{Q}{S}$ ce produit, pour la surface correspondant à la valeur u du paramètre. Pour l'évaluer, nous considérerons, en posant toujours $U = \frac{Q}{S}$, l'intégrale

$$I = \int \frac{dU}{U} = \int \frac{dU}{d\lambda} \frac{1}{U} d\lambda.$$

Les infinis de la fonction $\frac{dU}{d\lambda} \frac{1}{U}$ sont tous simples, ce sont les zéros de S et les zéros de Q. Nous pouvons donc appliquer à I la formule

du n° **14**, et nous aurons, les intégrales I étant prises entre les points communs à C et aux surfaces,

$$\Phi(x, y, z, t, u_0) = 0, \qquad \Phi(x, y, z, t, u) = 0 :$$

$$\Sigma I = \Sigma \sigma \log \frac{\Phi(x, y, z, t, u)}{\Phi(x, y, z, t, u_0)},$$

la somme du second membre s'étendant aux points communs à la courbe C et aux surfaces $Q = 0$, $S = 0$, et σ étant en chacun de ces points le résidu de la fonction

$$\Theta_1(\lambda) = \frac{dU}{d\lambda} \frac{1}{U}.$$

Soit λ_0 l'argument d'un point commun à C et à la surface $Q = 0$. On a, au voisinage de cette valeur,

$$U = \frac{Q}{S} = \mathcal{A}(\lambda - \lambda_0)^k + \mathcal{B}(\lambda - \lambda_0)^{k+1} + \ldots,$$

$$\frac{dU}{d\lambda} = \mathcal{A}k(\lambda - \lambda_0)^{k-1} + \ldots,$$

et, par suite, le résidu correspondant de $\Theta(\lambda)$ sera

$$\sigma_0 = k.$$

Si, de même, λ_1 est l'argument d'un point commun à C et à la surface $S = 0$, et si l'on a, au voisinage de cette valeur,

$$\frac{Q}{S} = \mathcal{A}_1(\lambda - \lambda_1)^{-h} + \ldots,$$

on trouvera, pour résidu correspondant,

$$\sigma_1 = -h.$$

Il vient ainsi

$$\sum I = \sum \int \frac{dU}{U} = \sum k \log \frac{\Phi(x, \ldots, u)}{\Phi(x, \ldots, u_0)} - \sum h \log \frac{\Phi(x, \ldots, u)}{\Phi(x, \ldots, u_0)}.$$

Dans le second membre, la première somme est étendue aux points communs à la courbe C et à la surface $Q = 0$; dans la deuxième, aux points communs à C et à la surface $S = 0$.

Si l'on passe des logarithmes aux fonctions, on arrive à la formule suivante :

$$\prod_u \frac{Q}{S} = \prod_{u_0} \frac{Q}{S} \prod_Q \frac{\Phi(x, y, z, t, u)}{\Phi(x, y, z, t, u_0)} \prod_S \frac{\Phi(x, y, z, t, u_0)}{\Phi(x, y, z, t, u)}.$$

Les produits $\prod_Q$ s'étendent aux points communs à C et à la surface $Q = 0$; les produits $\prod_S$ aux points communs à C et à $S = 0$. On peut écrire plus simplement

$$(6) \qquad \prod_u \frac{Q}{S} = A \frac{\Pi_Q \Phi(x, y, z, t, u)}{\Pi_S \Phi(x, y, z, t, u)},$$

A étant une constante indépendante de u.

15. Il est aisé de trouver la condition nécessaire pour que le second membre soit lui-même indépendant de u.

Le numérateur $\Pi_Q \Phi(x, y, z, t, u)$ est un polynôme en u, dont les racines sont celles des équations

$$\Phi(x_1, y_1, z_1, t_1, u) = 0, \qquad \Phi(x_2, \ldots, t_2, u) = 0, \qquad \ldots,$$

$x_1, \ldots, t_1$; $x_2, \ldots, t_2$; ... étant les coordonnées des points communs à la surface $Q = 0$ et à la courbe C. Ces racines sont donc les valeurs de u qui correspondent aux surfaces du système $\Phi(x, y, z, t, u)$, passant par les points en question.

De même, les racines du dénominateur $\Pi_S \Phi(x, y, z, t, u)$ sont les valeurs de u qui correspondent aux surfaces du système passant par les points communs à la surface $S = 0$ et à la courbe C.

Pour que le second membre de la relation (6) soit indépendant de u, il faut et il suffit donc que les deux séries précédentes de valeurs de u soient identiques.

Donc :

Le produit des valeurs que prend une fonction rationnelle,

$\frac{Q}{S}(x, y, z, t)$, *homogène et de degré zéro, aux points communs à une courbe gauche algébrique*, C, *et à chacune des surfaces du système* $\Phi(x, y, z, t, u) = 0$, *est indépendant du paramètre* u, *si les surfaces de ce système qui passent par chacun des points communs à la courbe* C *et à la surface* $Q = 0$ *sont les mêmes que celles qui passent par chacun des points communs à la courbe et à la surface* $S = 0$.

En particulier, le produit restera constant si toutes les surfaces du système qui passent par un quelconque des points communs à la courbe C *et à l'ensemble des deux surfaces* $Q = 0$, $S = 0$, *passent en même temps par tous les autres.*

Cette proposition subsiste sans modification, quels que soient les contacts de la courbe C avec les surfaces $Q = 0$, $S = 0$.

III. — Extension d'une formule de Jacobi.

16. Pour l'application du théorème d'Abel aux intégrales multiples, nous nous appuierons sur une formule qu'on peut considérer comme l'extension d'une formule célèbre, donnée autrefois par Jacobi, et qui joue en Analyse un rôle important. Elle se déduit de considérations analogues à celles dont nous venons de faire usage.

La formule de Jacobi est la suivante.

Si $f(X, Y) = 0$ et $\varphi(X, Y) = 0$ sont les équations de deux courbes planes algébriques, de degrés respectifs m et n, et si $Q(X, Y)$ est un polynôme en X, Y, de degré égal ou inférieur à $m + n - 3$, on a identiquement

$$\sum \frac{Q(X, Y)}{f'_X \varphi'_Y - f'_Y \varphi'_X} = 0,$$

la somme étant étendue à tous les points (X, Y) communs aux deux courbes $f = 0$, $\varphi = 0$. Jacobi a même donné un moyen de calculer cette somme, dans le cas où le degré du polynôme Q est égal à $m + n - 2$.

L'importance de la formule de Jacobi est mise en évidence par ce fait qu'on peut, en la prenant comme point de départ, établir le théo-

rème d'Abel pour les intégrales de première et de troisième espèce : c'est la marche qu'ont suivie MM. Clebsch et Gordan.

Cette formule s'étend sans difficulté au cas d'un plus grand nombre de variables et de fonctions : Jacobi l'avait observé lui-même; après lui, Liouville et Clebsch ont donné des démonstrations de la formule ainsi généralisée, qui, dans le cas des surfaces, peut s'énoncer comme il suit :

Si $f(X, Y, Z) = 0$, $\varphi(X, Y, Z) = 0$, $\psi(X, Y, Z) = 0$ sont les équations de trois surfaces algébriques de degrés respectifs m, n et p; si l'on désigne par Δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} f'_X & f'_Y & f'_Z \\ \varphi'_X & \varphi'_Y & \varphi'_Z \\ \psi'_X & \psi'_Y & \psi'_Z \end{vmatrix}$$

et si $Q(X, Y, Z)$ est un polynôme en X, Y, Z, de degré inférieur au degré de Δ, c'est-à-dire à $m + n + p - 3$, on a identiquement

$$\sum \frac{Q(X, Y, Z)}{\Delta(X, Y, Z)} = 0,$$

la somme étant étendue aux points (X, Y, Z) communs aux trois surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

17. Que devient cette formule dans le cas où le degré de Q est supérieur ou égal à celui de Δ? C'est ce que nous allons rechercher, en examinant même le cas où Q est non plus un polynôme, mais une fonction rationnelle quelconque; nous arriverons ainsi à une expression relativement simple, qui servira de base à nos recherches ultérieures sur le théorème d'Abel.

Désignons toujours par C la courbe gauche, intersection complète ou partielle, des deux surfaces $f(X, Y, Z) = 0$, $\varphi(X, Y, Z) = 0$, de degrés respectifs m et n.

Soient $Q(X, Y, Z)$ un polynôme de degré q en X, Y, Z; $\psi(X, Y, Z)$ un autre polynôme de degré p : désignons toujours par x', y', z', t' les dérivées des coordonnées x, y, z, t d'un point de la courbe C par rap-

port au paramètre fuchsien λ, et considérons l'intégrale

$$I = \int \frac{Q(X, Y, Z)}{\psi(X, Y, Z)[f'_X \varphi'_Z - f'_Z \varphi'_X]} dX,$$

X, Y, Z étant liés par les relations $f = 0$, $\varphi = 0$; ou, plus exactement, X, Y, Z étant les coordonnées d'un point de la courbe C. Si nous rendons cette intégrale homogène par la substitution de $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$ à X, Y, Z et si nous remplaçons x, y, z, t par leurs valeurs en fonction thêta-fuchsienne de λ, l'intégrale devient

$$I = \int \frac{Q(x, y, z, t)}{\psi(x, y, z, t)[f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y]} \frac{x't - xt'}{t^k} d\lambda.$$

Dans cette expression, k est un entier défini par la relation

$$k = q - (m + n + p) + 4.$$

Désignons par $\Theta(\lambda)$ la fonction de λ soumise au signe $\int$,

$$\Theta(\lambda) = \frac{Q}{\psi[f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y]} \frac{x't - xt'}{t^k}.$$

Nous savons (n° **5**) que la somme des résidus de cette fonction, dans l'intérieur du polygone fondamental, est égale à zéro.

Les infinis de la fonction $\Theta(\lambda)$ sont de trois sortes :

1° Ceux qui correspondent à un zéro de $\psi(x, y, z, t)$, c'est-à-dire les arguments, λ, des points communs à la courbe C et à la surface $\psi(x, y, z, t) = 0$;

2° Ceux qui correspondent à un zéro de la fonction $f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y$;

3° Ceux qui correspondent à un zéro de t^k, dans le cas où le nombre k est au moins égal à 1, c'est-à-dire si l'on a $q \geq m + n + p - 3$.

Soit d'abord λ l'argument d'un point de la courbe C situé sur la surface $\psi(x, y, z, t) = 0$.

Si nous admettons que cette surface ne touche C en aucun point, λ est un zéro simple de $\psi(x, y, z, t)$ et le résidu r est donné par la

formule

$$r = \frac{Q(x, y, z, t)}{f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y} \frac{x't - xt'}{t^k} \frac{1}{\psi'_x x' + \psi'_y y' + \psi'_z z' + \psi'_t t'},$$

et, d'après un calcul déjà fait plusieurs fois,

$$r = \frac{Q(x, y, z, t)}{f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y} \frac{x't - xt'}{t^{k-1}} \frac{1}{\psi'_x(x't - xt') + \psi'_y(y't - yt') + \psi'_z(z't - zt')}.$$

Remplaçant $x't - xt'$, $y't - yt'$, $z't - zt'$ par les quantités proportionnelles (n° 4)

$$f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y, \qquad f'_z \varphi'_x - f'_x \varphi'_z, \qquad f'_x \varphi'_y - f'_y \varphi'_x,$$

on trouve

$$r = \frac{Q(x, y, z, t)}{t^{k-1} \Delta(x, y, z, t)} = \frac{Q(X, Y, Z)}{\Delta(X, Y, Z)},$$

Δ étant le déterminant défini au n° **16**, et X, Y, Z étant les coordonnées d'un des points communs à la courbe C et à la surface $\psi(X, Y, Z) = 0$.

La somme des résidus de la fonction $\Theta(\lambda)$, correspondant aux zéros de ψ, est donc précisément égale à la somme cherchée, $\sum \frac{Q}{\Delta}$, étendue aux points communs à la courbe C et à la surface $\psi = 0$.

Soit maintenant un zéro, λ, de $f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y$.

On a en chaque point de la courbe C (n° 4)

$$\frac{x't - xt'}{f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y} = \frac{y't - yt'}{f'_z \varphi'_x - f'_x \varphi'_z} = \frac{z't - zt'}{f'_x \varphi'_y - f'_y \varphi'_x}.$$

Si le zéro, λ, de $f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y$ n'annule pas $x't - xt'$, c'est-à-dire si le point correspondant de la courbe C n'est pas le point de contact d'une tangente parallèle au plan des YZ, il annulera nécessairement les fonctions $f'_z \varphi'_x - f'_x \varphi'_z$ et $f'_x \varphi'_y - f'_y \varphi'_x$. Deux cas sont donc à distinguer :

1° Le zéro, λ, de $f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y$ annule $x't - xt'$; la relation

$$\Theta(\lambda) = \frac{Q}{\psi t^k} \frac{x't - xt'}{f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y}$$

montre que Θ reste fini pour cette valeur, et par suite le résidu correspondant est nul.

2° Le zéro considéré annule $f'_y\varphi'_z - f'_z\varphi'_y$; $f'_z\varphi'_x - f'_x\varphi'_z$; $f'_x\varphi'_y - f'_y\varphi'_x$: les deux surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$ sont alors tangentes au point correspondant de la courbe C, ou, plus exactement, leur intersection présente en ce point un point singulier. Ce cas va lui-même se subdiviser en deux autres, selon que le point singulier de l'intersection sera ou non un point singulier de la courbe C; ce sera nécessairement un point singulier de C, si C constitue l'intersection complète des deux surfaces, ce que nous allons supposer.

18. Admettons, dans cette hypothèse, qu'il s'agisse d'un point double, A, de la courbe C, de coordonnées a, b, c, auquel correspondent les deux valeurs μ et μ_1 du paramètre λ.

Posons, pour simplifier,

$$R = f'_Y\varphi'_Z - f'_Z\varphi'_Y.$$

Le résidu r_μ de la fonction $\Theta(\lambda)$, correspondant à l'infini simple μ, sera

$$r_\mu = \frac{Q(a, b, c)}{\psi(a, b, c)} \frac{a'}{R'_a a' + R'_b b' + R'_c c'},$$

a', b', c' étant les dérivées X, Y, Z par rapport à λ, pour la valeur $\lambda = \mu$: ces dérivées sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la tangente menée, au point A, à la branche de la courbe C qui correspond à la valeur μ du paramètre.

On a de même, pour le résidu correspondant à $\lambda = \mu_1$,

$$r_{\mu_1} = \frac{Q(a, b, c)}{\psi(a, b, c)} \frac{a'_1}{R'_a a'_1 + R'_b b'_1 + R'_c c'_1};$$

d'où

$$r_\mu + r_{\mu_1} = \frac{Q(a, b, c)}{\psi(a, b, c)} \left(\frac{a'}{R'_a a' + R'_b b' + R'_c c'} + \frac{a'_1}{R'_a a'_1 + R'_b b'_1 + R'_c c'_1} \right).$$

Je dis que la quantité entre crochets dans le second membre est égale à zéro.

Soit, en effet, P(X, Y, Z) un polynôme de degré $m+n-4$ en X, Y, Z.

On voit, comme plus haut, que l'intégrale, appartenant à la courbe C,

$$\int \frac{P(X, Y, Z)}{f'_Y \varphi'_Z - f'_Z \varphi'_Y} dX,$$

prise le long du polygone fondamental est nulle. Cette intégrale peut s'écrire

$$\int \frac{P(x, y, z, t)}{f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y} (x't - xt') d\lambda,$$

et, t n'étant pas en facteur au dénominateur à cause du degré de P, la quantité sous le signe $\int$ n'a pas d'autres infinis que les valeurs de λ qui correspondent aux points singuliers de la courbe C. La somme des résidus relatifs à ces valeurs est donc nulle. Or, on peut choisir pour P le premier membre de l'équation d'une surface de degré $m+n-4$, présentant en tous les points singuliers de la courbe C, le point A excepté, le caractère d'une surface adjointe (¹); les seuls infinis de la fonction $\frac{P(x't - xt')}{f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y}$ sont alors les quantités μ et μ_1; la somme des résidus correspondants étant nulle, on a, comme plus haut,

$$0 = r'_\mu + r'_{\mu_1} = P(a, b, c)\left(\frac{a'}{R'_a a' + R'_b b' + R'_c c'} + \frac{a'_1}{R'_a a'_1 + R'_b b'_1 + R'_c c'_1}\right),$$

et, par suite, on a bien aussi, puisque $P(a, b, c)$ n'est pas nul,

$$r_\mu + r_{\mu_1} = 0.$$

Il n'y aurait d'exception que si, dans l'expression de $r_\mu + r_{\mu_1}$, on ne pouvait pas mettre en facteur $\frac{Q(a, b, c)}{\psi(a, b, c)}$, c'est-à-dire si $\psi(a, b, c)$ était nul, ce qui, géométriquement, signifierait que la surface $\psi = 0$ passe par le point singulier. Écartons ce cas particulier; nous voyons que, si la courbe C est l'intersection complète des deux surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$,

(¹) *Voir*, pour la démonstration de l'existence d'un tel polynôme P le Mémoire de M. Nöther sur les courbes gauches (*Journal de Crelle*, t. 93).

il n'y a pas, dans l'évaluation des résidus de $\Theta(\lambda)$, à tenir compte des zéros de $f'_z\varphi'_y - f'_y\varphi'_z$.

Si C ne forme pas l'intersection complète des deux surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, nous nous bornerons à faire observer qu'on n'a pas à tenir compte de ces zéros s'ils annulent en même temps $Q(x, y, z, t)$, parce qu'alors $\Theta(\lambda)$ reste fini pour les valeurs correspondantes.

19. Revenant au cas où C est l'intersection complète des deux surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, il résulte de tout ce qui précède que *la somme* à évaluer, $\sum \frac{Q}{\Delta}$, ou, en coordonnées homogènes, $\sum \frac{Q}{t^{k-1}\Delta}$, *étendue à tous les points communs aux trois surfaces* $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, *est égale et de signe contraire à la somme des résidus, correspondant aux zéros de* t, *de la fonction*

$$(7) \qquad \Theta(\lambda) = \frac{Q(x, y, z, t)}{\psi(x, y, z, t)[f'_y\varphi'_z - f'_z\varphi'_y]} \frac{x't - xt'}{t^k},$$

où l'on suppose les coordonnées de la courbe $f = 0$, $\varphi = 0$ exprimées en fonction thètafuchsienne d'un paramètre λ.

Rappelons que m, n, p, q sont les degrés en X, Y, Z de f, φ, ψ, Q et qu'on a

$$k = q - (m + n + p) + 1.$$

Pour arriver à ce résultat nous avons dû faire plusieurs hypothèses, dont il est aisé de nous débarrasser.

Nous avons admis que la surface $\psi = 0$ ne touchait pas la courbe C et ne passait par aucun des points singuliers de cette courbe.

S'il en est autrement, désignons par x, y, z, t les coordonnées d'un point de contact de $\psi = 0$ et de C, ou celles d'un point double de C par lequel passerait la surface $\psi = 0$. Il est clair qu'en ce point le déterminant Δ s'annule; de plus, deux des points communs aux trois surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ étant confondus avec le point x, y, z, t, deux des termes de la somme $\sum \frac{Q}{\Delta}$ deviennent infinis, et cette somme est indéterminée.

Mais, si nous supposons que la surface $\psi = 0$ dépende d'un paramètre variable, le théorème précédent s'appliquera lorsque cette surface, par exemple, sera sur le point de toucher la courbe C, et il restera vrai à la limite, lorsqu'elle touchera cette courbe; la somme $\sum \frac{Q}{\Delta}$, dont deux termes tendent vers l'infini, aura ainsi une limite bien déterminée. Il en sera de même si la surface $\psi = 0$ vient à passer, en variant d'une manière continue, par un point multiple de C.

Il faut seulement que la surface mobile, $\psi = 0$, ne passe pas *constamment* par un point multiple de C, et ne touche pas constamment cette courbe en un même point.

Remarquons enfin qu'il n'est pas nécessaire, pour qu'on puisse appliquer la formule précédente, que les surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$ se coupent suivant une courbe indécomposable : si ces surfaces se coupaient en effet suivant plusieurs courbes distinctes, on pourrait modifier infiniment peu leurs coefficients de façon à rester dans l'hypothèse d'une intersection indécomposable, et le théorème serait applicable. Il restera donc à la limite, puisqu'il conduit à une formule parfaitement déterminée; seulement il faudra former autant de fonctions $\Theta(\lambda)$ qu'il y a de courbes distinctes dans l'intersection des deux surfaces, et faire la somme des résidus de toutes ces fonctions pour tous les zéros de t.

20. On peut, dans certains cas, transformer ce résultat, pour le présenter sous une forme plus simple.

Soit λ_0 un zéro de t, c'est-à-dire l'argument d'un point à l'infini sur la courbe $f = 0$, $\varphi = 0$. Le résidu correspondant de $\Theta(\lambda)$ est égal, au facteur $\frac{1}{2\pi i}$ près, à la valeur de l'intégrale $\int \Theta(\lambda)\, d\lambda$ le long d'un petit contour entourant le point λ_0. Effectuons un changement de variable, en prenant pour nouvelle variable, à la place de λ, la quantité $\frac{t}{x}$, et posons

$$\frac{t}{x} = \theta, \qquad \frac{y}{x} = \eta, \qquad \frac{z}{x} = \zeta.$$

Soient 0, η_0, ζ_0 les valeurs de θ, η, ζ pour $\lambda = \lambda_0$: l'intégrale pré-

cédente peut s'écrire

$$\int \Theta(\lambda)\,d\lambda = \int \Theta(\lambda)\,\frac{1}{\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)}\,d\theta,$$

c'est-à-dire

$$\int \Theta(\lambda)\,d\lambda = \int \frac{Q(1,\eta,\zeta,\theta)}{\psi(1,\eta,\zeta,\theta)}\,\frac{x't - xt'}{f'_\eta\varphi'_\zeta - f'_\zeta\varphi'_\eta}\,\frac{x^2}{t'x - x't}\,\frac{x^{q-p-m-n-k+2}}{\theta^k}\,d\theta,$$

ou, en simplifiant et remarquant que $k = q - (m + n + p) + 4$,

$$\int \Theta(\lambda)\,d\lambda = -\int \frac{Q(1,\eta,\zeta,\theta)}{\psi(1,\eta,\zeta,\theta)\,[f'_\eta\varphi'_\zeta - f'_\zeta\varphi'_\eta]}\,\frac{d\theta}{\theta^k}.$$

Si λ_0 est un zéro simple de t, pendant que la variable λ décrit un contour autour du point λ_0, la variable θ décrira une fois un contour autour du point $\theta = 0$, et, par suite, le résidu que nous cherchons sera égal au produit de $\frac{1}{2\pi i}$ par la valeur de l'intégrale du second membre le long d'un petit contour entourant le point $\theta = 0$, les fonctions η et ζ étant définies par les équations

$$f(1,\eta,\zeta,\theta) = 0, \qquad \varphi(1,\eta,\zeta,\theta) = 0,$$

et ayant les valeurs initiales η_0 et ζ_0 pour $\theta = 0$. On peut donc dire que le résidu cherché est le résidu de la fonction de θ

$$-\frac{Q}{\psi}\,\frac{1}{[f'_\eta\varphi'_\zeta - f'_\zeta\varphi'_\eta]\,\theta^k},$$

pour $\theta = 0$, η et ζ étant définis comme on vient de l'expliquer. Ce résidu est évidemment égal au coefficient de θ^{k-1} dans le développement, suivant les puissances croissantes de θ, de la fonction

$$-\frac{Q}{\psi\,[f'_\eta\varphi'_\zeta - f'_\zeta\varphi'_\eta]},$$

c'est-à-dire à l'expression

$$\frac{-1}{1.2\ldots(k-1)}\,\frac{d^{k-1}}{d\theta^{k-1}}\left[\frac{Q(1,\eta,\zeta,\theta)}{\psi(1,\eta,\zeta,\theta)\,[f'_\eta\varphi'_\zeta - f'_\zeta\varphi'_\eta]}\right],$$

où l'on a fait $\theta = 0$.

Nous sommes ainsi arrivé à la formule suivante :

Soient trois surfaces algébriques,

$$f(x, y, z, t) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, t) = 0, \qquad \psi(x, y, z, t) = 0,$$

de degrés respectifs m, n, p; soit de plus $Q(x, y, z, t)$ un polynôme homogène en x, y, z, t, dont le degré q est supérieur ou égal à $m + n + p - 3$, et soit posé

$$k = q - (m + n + p) + 4.$$

Désignons par Δ le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \\ \psi'_x & \psi'_y & \psi'_z \end{vmatrix}.$$

La valeur de la somme $\sum \frac{Q}{t^{k-1}\Delta}$, étendue à tous les points communs aux trois surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, est donnée par la formule

$$(8) \quad \sum \frac{Q}{t^{k-1}\Delta} = \frac{1}{1.2\ldots(k-1)} \sum \frac{d^{k-1}}{d\theta^{k-1}} \left[\frac{Q(1, \eta, \zeta, \theta)}{\psi(1, \eta, \zeta, \theta)\,[f'_\eta \varphi'_\zeta - f'_\zeta \varphi'_\eta]} \right]_0.$$

Dans le second membre, la somme s'étend à tous les points à l'infini de la courbe $f = 0$, $\varphi = 0$; η, ζ, θ désignent $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \frac{t}{x}$; η et ζ sont considérées comme des fonctions de θ définies par les équations

$$f(1, \eta, \zeta, \theta) = 0, \qquad \varphi(1, \eta, \zeta, \theta) = 0,$$

et, dans la dérivée d'ordre $k - 1$ calculée d'après ces bases, on fait finalement $\theta = 0$.

On suppose toutefois que la courbe $f = 0$, $\varphi = 0$ ne touche pas le plan de l'infini.

21. *Remarque I.* — Dans cet énoncé, nous n'avons pas laissé subsister la restriction faite plus haut que la courbe commune aux surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$ est indécomposable : si en effet les deux surfaces se coupent suivant plusieurs courbes distinctes, modifions infiniment peu leurs coefficients de manière qu'elles se rencontrent suivant une courbe indécomposable; le théorème est alors applicable, et il est clair qu'il reste vrai à la limite, puisque la formule continue à se présenter sous une forme bien déterminée. Seulement il importe d'observer que la somme $\sum \frac{Q}{t^{k-1}\Delta}$ ainsi calculée s'étend à *tous* les points communs aux surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, et qu'elle ne serait pas vraie si on l'appliquait seulement aux points communs à la surface $\psi = 0$ et à une partie de l'intersection des surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$.

22. *Remarque II.* — La formule se présente sous une forme non symétrique par rapport aux fonctions f, φ et ψ : il est clair qu'elle peut prendre deux autres formes, par la permutation entre elles de ces fonctions. Dans chaque cas particulier, on choisira ainsi la forme la plus commode pour le développement de la dérivée d'ordre $k - 1$.

23. *Remarque III.* — Si le degré de Q est inférieur ou égal à

$$m + n + p - 4,$$

k est négatif ou nul, et t ne figure plus en dénominateur dans $\Theta(\lambda)$: il n'y a donc pas de résidus correspondant aux zéros de t, et la somme $\sum \frac{Q t^{1-k}}{\Delta}$ étendue aux points d'intersection des trois surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, est nulle. C'est le théorème de Jacobi, Liouville et Clebsch.

24. *Remarque IV.* — Si Q est de même degré que Δ, c'est-à-dire de degré $m + n + p - 3$, on aura $k = 1$, et la formule devient

$$\sum \frac{Q}{\Delta} = \sum \frac{Q(1, \eta, \zeta, 0)}{\psi(1, \eta, \zeta, 0)\,[f'_\eta \varphi'_\zeta - f'_\zeta \varphi'_\eta]}$$

ou, si l'on veut,

$$\sum \frac{Q}{\Delta} = \sum \frac{x\,Q(x, y, z, t)}{\psi(x, y, z, t)\,[f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y]}.$$

la somme du second membre étant étendue aux points à l'infini de la courbe $f = 0$, $\varphi = 0$.

Cette somme ne dépend que des termes des degrés le plus élevés en x, y, z dans les polynômes f, φ, ψ et Q, c'est-à-dire des courbes à l'infini sur les surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $Q = 0$; elle ne change donc pas si l'on remplace ces surfaces par des surfaces qui leur soient respectivement asymptotiques.

25. *Remarque V.* — On voit de même, en général, que la somme $\sum \frac{Q}{t^{k-1}\Delta}$, étendue aux points d'intersection des trois surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, ne change pas si l'on remplace f, φ, ψ et Q respectivement par $f + t^k f_1$; $\varphi + t^k \varphi_1$; $\psi + t^k \psi_1$; $Q + t^k Q_1$; f_1, φ_1, ψ_1, Q_1 étant des polynômes quelconques de degrés respectifs $m - k$, $n - k$, $p - k$, $q - k$; car, dans la dérivée d'ordre $k - 1$ qui figure dans le second membre de (8), f_1, φ_1, ψ_1, Q_1 et leurs dérivées n'apparaîtront que multipliés par des puissances de θ, et par suite ne subsisteront plus dans l'équation quand on y fera $\theta = 0$.

26. *Remarque VI.* — La forme de la fonction $\Theta(\lambda)$

$$\Theta(\lambda) = \frac{Q}{\psi(f'_x \varphi'_z - f'_z \varphi'_x)} \frac{x't - xt'}{t^k}$$

montre que les résidus par rapport aux zéros de t^k seront tous nuls, non seulement si Q est divisible par t^k, ce qui est le cas de la *Remarque III*, mais encore si $\frac{Q}{t^k}$ reste fini pour les points de la courbe $f = 0$, $\varphi = 0$, situés dans le plan de l'infini, $t = 0$. Donc :

La somme $\sum \frac{Q(x, y, z, t)}{t^{k-1}\Delta(x, y, z, t)}$, *étendue aux points d'intersection des trois surfaces* $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, *est nulle si la fonction* $\frac{Q(x, y, z, t)}{t^k \mu^{q-k}}$ *reste finie pour les points à l'infini de la courbe commune à deux de ces surfaces,* en désignant par μ une fonction linéaire quelconque de x, y, z, t, introduite pour l'homogénéité, et ne s'annulant en aucun de ces points.

27. La formule du n° **19** est susceptible d'une extension importante, à laquelle on arrive par l'application des principes employés plus haut.

Si l'on part en effet de l'intégrale, appartenant toujours à la courbe $f = 0$, $\varphi = 0$,

$$I = \int \frac{Q(X, Y, Z)}{\psi(X, Y, Z)[f'_Y\varphi'_Z - f'_Z\varphi'_Y]} \frac{dX}{R^\alpha T^\beta \ldots},$$

Q étant un polynôme de degré q; R, T, ... des polynômes de degrés r, s, ... en X, Y, Z, on voit qu'en la rendant homogène et en substituant à x, y, z, t leurs valeurs en fonction thêtafuchsienne de λ, elle prend la forme

$$I = \int \frac{Q}{\psi[f'_y\varphi'_z - f'_z\varphi'_y]} \frac{x't - xt'}{R^\alpha T^\beta \ldots} \frac{d\lambda}{t^k},$$

étant posé

$$k = q + 1 - (m + n + p) - (\alpha r + \beta s + \ldots).$$

Le facteur t ne figurera pas au dénominateur si l'on a $k \geq 0$, c'est-à-dire si

$$m + n + p + \alpha r + \beta s + \ldots \geq q + 1.$$

Cela posé, on voit, comme plus haut, que la somme des résidus, dans le polygone fondamental, de la fonction

$$(9) \qquad \Theta(\lambda) = \frac{Q}{\psi(f'_y\varphi'_z - f'_z\varphi'_y)} \frac{x't - xt'}{R^\alpha T^\beta \ldots t^k},$$

est nulle, et qu'il n'y a pas lieu de tenir compte de ceux qui proviennent des zéros de $f'_y\varphi'_z - f'_z\varphi'_y$, pourvu toutefois qu'aucune des surfaces $\psi = 0$; $R = 0$; $T = 0$; ...; $t = 0$ ne passe par un point singulier de la courbe $f = 0$, $\varphi = 0$.

Le résidu de $\Theta(\lambda)$ pour un zéro de ψ, correspondant à un point x, y, z, t de la courbe $f = 0$, $\varphi = 0$, est, d'après le calcul du n° **17**, égal à

$$\frac{Q}{\Delta R^\alpha T^\beta \ldots}.$$

On a donc la relation

$$(10) \qquad \sum \frac{Q}{\Delta R^\alpha T^\beta \ldots} + \sum \rho_R + \sum \rho_T + \ldots = 0,$$

la première somme s'étendant aux points communs aux surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$; $\sum \rho_R$, $\sum \rho_T$, ... désignant les sommes des résidus de la fonction $\Theta(\lambda)$ par rapport aux zéros de R, T, ..., t^k.

Si l'on suppose $\alpha = \beta = \ldots = 1$, et si k est nul ou négatif, la formule devient

$$(11) \qquad \sum \frac{Q}{\Delta_{f\varphi\psi} RS \ldots} + \sum \frac{Q}{\Delta_{f\varphi R\psi} T \ldots} + \sum \frac{Q}{\Delta_{f\varphi T\psi} R \ldots} + \ldots = 0,$$

$\Delta_{f\varphi\psi}$ désignant toujours le déterminant dont les lignes sont les dérivées partielles de f, φ, ψ par rapport à x, y, z. La première somme s'étend aux points communs aux surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$; la seconde aux points communs à $f = 0$, $\varphi = 0$, $R = 0$, et ainsi de suite.

28. *Remarque I.* — La formule (10) montre que la somme $\sum \frac{Q}{\Delta R^\alpha T^\beta \ldots}$ est nulle si $\Theta(\lambda)$ n'a pas d'autres infinis que les zéros de ψ et ceux de $f'_y \varphi'_z - f'_z \varphi'_y$, c'est-à-dire si la surface $Q = 0$ a un contact d'ordre $\alpha - 1$ avec la courbe $f = 0$, $\varphi = 0$, en tout point de cette courbe situé sur $R = 0$; un contact d'ordre $\beta - 1$ en tout point situé sur $T = 0$, ..., un contact d'ordre $k - 1$ en tout point situé sur $t = 0$, $[k \geq 1]$.

D'une manière plus précise, on peut dire que la somme $\sum \frac{Q}{\Delta R^\alpha T^\beta \ldots}$ étendue aux points communs aux surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ est nulle, si la fonction $\frac{Q}{R^\alpha T^\beta \ldots t^k \mu^h}$ reste finie pour tous les points de la courbe $f = 0$, $\varphi = 0$ situés sur les surfaces $R = 0$, $T = 0$, ..., $t = 0$, μ étant une fonction linéaire de x, y, z, t, introduite à une puissance convenable pour l'homogénéité, et ne s'annulant en aucun de ces points.

29. *Remarque II.* — Si, dans ce qui précède, on remplace le polynôme Q par un polynôme de même degré, Q_1, de la forme

$$Q_1 = Q + Af + B\varphi + C\psi,$$

A, B, C étant des polynômes entiers, la somme $\sum \frac{Q_1}{\Delta R^\alpha T^\beta \ldots}$, étendue

aux points d'intersection des surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, sera égale à la somme analogue, où Q_1 est remplacé par Q.

Elle aura encore pour valeur la somme, changée de signe, des résidus par rapport aux zéros de R, S, ..., t de la fonction

$$\Theta_1(\lambda) = \frac{Q + Af + B\varphi + C\psi}{\psi(f'_y\varphi'_z - f'_z\varphi'_y)} \frac{x't - xt'}{R^\alpha T^\beta \ldots t^k}.$$

Elle sera nulle si la fonction $\frac{Q + Af + B\varphi + C\psi}{R^\alpha T^\beta \ldots t^k \mu^h}$ reste finie pour tous les points de la courbe $f = 0$, $\varphi = 0$, et en particulier si

$$Q + Af + B\varphi + C\psi,$$

est divisible par $R^\alpha T^\beta \ldots t^k$.

IV. — Application aux intégrales multiples du théorème d'Abel.

30. Soit $f(X, Y, Z) = 0$ l'équation d'une surface algébrique de degré m; considérons l'intégrale double, appartenant à cette surface,

$$J = \int\int \frac{Q(X, Y, Z)}{S(X, Y, Z)} \frac{dX\,dY}{f'_Z}.$$

Soient maintenant deux systèmes de surfaces algébriques :

$$\Phi(X, Y, Z, u) = 0, \qquad \Psi(X, Y, Z, v) = 0,$$

dont les équations, de degrés n et p en X, Y, Z, renferment respectivement deux paramètres, u et v.

Deux surfaces voisines du premier système et deux surfaces voisines du second découpent sur la surface fixe, $f(X, Y, Z) = 0$, des quadrilatères curvilignes infiniment petits, dont le nombre est égal à celui des points de rencontre des surfaces $f = 0$, $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, c'est-à-dire à mnp.

Si l'on fait varier la deuxième surface du système u, en laissant la première fixe, et si l'on fait de même varier la deuxième surface du système v, les quadrilatères découpés prendront des dimensions finies : le problème que nous nous proposons est d'évaluer la somme algébrique

des valeurs de l'intégrale J, prise dans tous les quadrilatères ainsi déterminés.

Soient

$$\Phi(X, Y, Z, u) = 0, \qquad \Phi(X, Y, Z, u + du) = 0,$$
$$\Psi(X, Y, Z, v) = 0, \qquad \Psi(X, Y, Z, v + dv) = 0$$

les équations de deux surfaces voisines du système u et de deux surfaces voisines du système v. Transformons l'intégrale J en prenant pour variables u et v à la place de X, Y.

Il faut, pour cela, remplacer $dX\,dY$ par $\frac{du\,dv}{\text{mod}\,\Pi}$, Π désignant le jacobien de u et v, considérés comme fonctions de X et Y.

Or on a les relations

$$f(X, Y, Z) = 0,$$
$$\Phi(X, Y, Z, u) = 0,$$
$$\Psi(X, Y, Z, v) = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial X} dX + \frac{\partial f}{\partial Y} dY + \frac{\partial f}{\partial Z} dZ = 0,$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} dX + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -\frac{\partial \Phi}{\partial u} du,$$
$$\frac{\partial \Psi}{\partial X} dX + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -\frac{\partial \Psi}{\partial v} dv.$$

Si l'on tire dZ de la première de ces équations pour le porter dans les deux autres, on trouve

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial Z} - \frac{\partial \Phi}{\partial Z}\frac{\partial f}{\partial X}\right] dX + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial Y}\frac{\partial f}{\partial Z} - \frac{\partial \Phi}{\partial Z}\frac{\partial f}{\partial Y}\right] dY = -\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial Z} du,$$

et une équation analogue pour dv.

Ces relations donnent $\frac{\partial u}{\partial X}, \frac{\partial u}{\partial Y}, \frac{\partial v}{\partial X}, \frac{\partial v}{\partial Y}$ et l'on a, par suite,

$$\Pi = \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial v}{\partial Y} - \frac{\partial v}{\partial X}\frac{\partial u}{\partial Y}$$
$$= \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial \Psi}{\partial v}} \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial Z} - \frac{\partial \Phi}{\partial Z}\frac{\partial f}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial \Psi}{\partial Y}\frac{\partial f}{\partial Z} - \frac{\partial \Psi}{\partial Z}\frac{\partial f}{\partial Y}\right) - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial Z} - \frac{\partial \Psi}{\partial Z}\frac{\partial f}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y}\frac{\partial f}{\partial Z} - \frac{\partial \Phi}{\partial Z}\frac{\partial f}{\partial Y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)^2},$$

c'est-à-dire

$$\Pi = \frac{\Delta}{\frac{\partial\Phi}{\partial u}\,\frac{\partial\Psi}{\partial v}\,\frac{\partial f}{\partial Z}},$$

en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial X} & \frac{\partial f}{\partial Y} & \frac{\partial f}{\partial Z} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial X} & \frac{\partial\Phi}{\partial Y} & \frac{\partial\Phi}{\partial Z} \\ \frac{\partial\Psi}{\partial X} & \frac{\partial\Psi}{\partial Y} & \frac{\partial\Psi}{\partial Z} \end{vmatrix}.$$

L'élément de l'intégrale double J devient ainsi

$$\frac{Q}{S}\,\frac{dX\,dY}{f_Z} = \frac{Q}{Sf_Z}\,\frac{du\,dv}{\operatorname{mod}\left[\frac{\Delta}{\frac{\partial\Phi}{\partial u}\,\frac{\partial\Psi}{\partial v}\,\frac{\partial f}{\partial Z}}\right]}.$$

La somme de ces éléments dans les quadrilatères infiniment petits découpés sur la surface $f = 0$ par les quatre surfaces considérées a donc pour valeur

$$du\,dv\sum\frac{Q}{Sf_Z}\operatorname{mod}\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial u}\,\frac{\partial\Psi}{\partial v}\,\frac{\partial f}{\partial Z}}{\Delta}.$$

Au lieu de considérer la somme de ces éléments, considérons leur somme algébrique, en supprimant le signe mod ; nous aurons alors à évaluer l'expression

$$du\,dv\sum\frac{Q}{S\Delta}\,\frac{\partial\Phi}{\partial u}\,\frac{\partial\Psi}{\partial v},$$

la somme s'étendant à tous les points communs aux surfaces $f = 0$, $\Phi = 0$, $\Psi = 0$; et par suite, la somme algébrique des valeurs que prend l'intégrale J dans les quadrilatères curvilignes compris sur la surface $f = 0$, entre les surfaces

$$\Phi(X, Y, Z, u_0) = 0, \qquad \Phi(X, Y, Z, u) = 0,$$
$$\Psi(X, Y, Z, v_0) = 0, \qquad \Psi(X, Y, Z, v) = 0,$$

aura pour expression

$$(12)\qquad K = \int_{u_0}^{u}\int_{v_0}^{v} du\,dv \sum \frac{Q\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v}}{S\Delta}.$$

la somme s'étendant aux points communs aux trois surfaces

$$f = 0, \qquad \Phi(X, Y, Z, u) = 0, \qquad \Psi(X, Y, Z, v) = 0.$$

Comme nous l'avons fait observer, c'est là l'expression de la somme algébrique des valeurs de l'intégrale J; pour préciser, on peut dire que, dans cette somme, chaque élément de l'intégrale $J\frac{Q}{S f_Z}dX\,dY$ figure, multiplié par $(-1)^{\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial Z}\Delta}$.

31. Dans la nouvelle intégrale double (12), en u et v, entre une somme de la nature de celles que nous avons étudiées précédemment.

Cette somme est une fonction symétrique des coordonnées des points communs aux surfaces $f = 0$, $\Phi = 0$, $\Psi = 0$: c'est donc une fonction rationnelle de u et v.

L'intégrale double K est donc de la forme

$$\int_{u_0}^{u}\int_{v_0}^{v} \frac{M(u, v)}{N(u, v)}\,du\,dv.$$

M et N étant des polynômes entiers. Cette intégrale ne peut donc, en général, se ramener aux fonctions rationnelles et logarithmiques, comme dans le cas d'une seule variable.

Une étude approfondie des différentes formes dont elle est susceptible sortirait du cadre du présent Mémoire, et nous nous réservons de revenir plus tard sur ce point; nous nous contenterons de signaler ici, en raison de leurs applications géométriques, quelques cas particuliers très étendus où l'intégrale K se présente sous une forme simple.

32. Supposons d'abord que les systèmes de surfaces $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ soient deux faisceaux ponctuels, et posons

$$\Phi(X, Y, Z, u) = \Phi_1(X, Y, Z) + u\,\Phi_2(X, Y, Z),$$
$$\Psi(X, Y, Z, v) = \Psi_1(X, Y, Z) + v\,\Psi_2(X, Y, Z).$$

On aura

$$K = \int\int du\,dv \sum \frac{Q\Phi_2\Psi_2}{S\Delta},$$

la somme $\sum$ s'étendant aux points communs aux surfaces $f = 0$, $\Phi = 0$, $\Psi = 0$.

Soient toujours m, n, p, q, s les degrés, en X, Y, Z, de f, Φ, Ψ, Q, S.

La somme $\sum \frac{Q\Phi_2\Psi_2}{S\Delta}$ devient, en coordonnées homogènes,

$$\sum \frac{Q\Phi_2\Psi_2}{t^{k-1}S\Delta},$$

étant posé

$$k = q - s - m + 4.$$

Nous distinguerons deux cas, selon que k est ou n'est pas supérieur à zéro.

1° Soit d'abord $k \leq 0$.

D'après les propositions du n° **28**, la somme précédente sera nulle si la fonction

$$\frac{Q\Phi_2\Psi_2 t^{-k}}{S\mu^h}, \tag{13}$$

reste finie en tous les points de la courbe $f = 0$, $\Phi = 0$, situés sur la surface $S = 0$; μ désigne une fonction linéaire quelconque de x, y, z, t, ne devenant pas nulle en ces points, et h est défini par la relation

$$h = m + n + p - 4.$$

A fortiori, la somme dont il s'agit sera nulle si la fonction (13) reste finie en chacun des points de la courbe commune aux surfaces $f = 0$; $S = 0$: cette condition est plus avantageuse à étudier que la précédente, parce que la courbe $f = 0$, $S = 0$ est une courbe fixe, indépendante des paramètres u et v.

Seulement, il importe de remarquer que μ est alors une fonction linéaire de x, y, z, t, qu'on devra faire varier d'un point à l'autre de cette courbe, de telle façon qu'elle ne s'annule pas au point de la courbe que l'on considère.

Posons, pour abréger,

$$\mathcal{F}(x, y, z, t) = \frac{Q\Phi_2 \Psi_2 t^{-k}}{p^k},$$

et supposons que l'on ait

$$S = R^\alpha T^\beta \ldots.$$

Imaginons que les coordonnées d'un point de la surface $f = 0$ soient exprimées en fonction de deux paramètres, σ et ω; $\mathcal{F}(x, y, z, t)$ devient alors une fonction $\mathcal{F}(\sigma, \omega)$.

Cherchons d'abord à quelles conditions $\frac{\mathcal{F}(\sigma, \omega)}{R^\alpha T^\beta \ldots}$ restera fini en un point, de paramètres ω_0, σ_0, situé sur la surface $R = 0$.

Si ce point est un point ordinaire de la surface $f = 0$, et si la surface $R = 0$ ne la touche pas en ce point, on aura, au voisinage des valeurs ω_0, σ_0 :

$$R(\omega, \sigma) = \mathcal{A}(\omega - \omega_0) + \mathcal{B}(\sigma - \sigma_0) + \mathcal{C}(\omega - \omega_0)^2 + \ldots,$$

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ n'étant pas nuls à la fois.

Si les surfaces $T = 0, \ldots$ ne passent pas par le point considéré, il faudra, pour que $\frac{\mathcal{F}}{R^\alpha T^\beta \ldots}$ reste fini pour $\omega = \omega_0$, $\sigma = \sigma_0$, que l'on ait, pour ces valeurs,

$$\mathcal{F}(\omega, \sigma) = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \omega} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} = 0, \qquad \ldots,$$

$$\frac{\partial^{\alpha-1} \mathcal{F}}{\partial \omega^{\alpha-1}} = 0, \qquad \frac{\partial^{\alpha-1} \mathcal{F}}{\partial \omega^{\alpha-1} \partial \sigma} = 0, \qquad \ldots \qquad \frac{\partial^{\alpha-1} \mathcal{F}}{\partial \sigma^{\alpha-1}} = 0.$$

Si la surface $R = 0$ touche au point ω_0, σ_0 la surface $f = 0$, ou, plus généralement, si la surface $S = 0$ a en ce point, avec cette dernière, un contact d'ordre $l - 1$ (l étant supérieur à α), ce qui se présente notamment aux points communs à $f = 0$ et à deux des surfaces $R = 0$, $T = 0, \ldots$, il faudra, pour que $\frac{\mathcal{F}}{R^\alpha T^\beta \cdots}$ reste fini au point

considéré, ajouter aux équations qui précèdent les suivantes :

$$\frac{\partial^{\alpha}\bar{\mathcal{F}}}{\partial\omega^{\alpha}} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{\alpha}\bar{\mathcal{F}}}{\partial\sigma^{\alpha}} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots, \quad \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial^{l-1}\bar{\mathcal{F}}}{\partial\omega^{l-1}} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{l-1}\bar{\mathcal{F}}}{\partial\sigma^{l-1}} = 0.$$

Comme la fonction μ ne s'annule pas pour $\omega = \omega_0$, $\sigma = \sigma_0$, il faut évidemment que ces conditions soient vérifiées par la fonction $Q\Phi_2\Psi_2 t^{-k}$ qui figure au numérateur de $\bar{\mathcal{F}}$; géométriquement, d'après la théorie du contact, cela revient à dire que la surface $Q\Phi_2\Psi_2 t^{-k} = 0$ passe par la courbe commune aux surfaces $f = 0$, $S = 0$, et que, si en un point de cette courbe la surface $S = 0$ a un contact d'ordre $l - 1$ avec la surface $f = 0$, la surface $Q\Phi_2\Psi_2 t^{-k} = 0$ a, au même point, avec cette dernière, un contact d'ordre supérieur.

La surface $Q\Phi_2\Psi_2 t^{-k} = 0$ se décomposant en surfaces distinctes, il suffit que la condition précédente soit remplie par l'une d'elles, et en particulier par la surface $\Phi_2\Psi_2 = 0$.

2° Soit maintenant $k > 0$. La somme $\sum \frac{Q\Phi_2\Psi_2}{S\Delta}$ s'écrit, en coordonnées homogènes,

$$\sum \frac{Q\Phi_2\Psi_2}{S\Delta t^{k-1}};$$

et l'on voit comme précédemment qu'elle sera nulle si la fonction

$$\frac{Q\Phi_2\Psi_2}{S t^k \mu^h} \tag{14}$$

reste finie en tous les points de la courbe commune à la surface $f = 0$ et à la surface $S t^k = 0$.

On arrive ainsi à un résultat semblable à celui que l'on a trouvé plus haut, en ayant soin de traiter le facteur t^k qui figure au dénominateur comme on a traité les facteurs R^{α}, T^{β}, ...

55. Toutes ces conséquences peuvent se résumer en une formule simple.

Soit I une intégrale double abélienne appartenant à une surface algébrique, $f(X, Y, Z) = 0$, de degré m,

$$I = \int\int \frac{Q}{Sf_Z'} dX dY,$$

Q et S étant des polynômes de degrés q et s en X, Y, Z.

La somme algébrique des valeurs que prend l'intégrale I dans les polygones curvilignes découpés sur la surface $f = 0$ par deux surfaces quelconques d'un premier faisceau ponctuel de degré n, et deux surfaces quelconques d'un second faisceau de degré p, est égale à zéro si l'on peut trouver une surface $\Phi_2 = 0$ du premier faisceau et une surface $\Psi_2 = 0$ du second, telles que la fonction

$$\frac{Q\Phi_2\Psi_2}{St^k\mu^h}$$

reste finie en chacun des points de la surface $f = 0$ situés sur les surfaces $s = 0$, $t = 0$, étant posé

$$k = q - s - m + 1,$$
$$h = m + n + p - 1.$$

Dans cette fonction, μ désigne une expression linéaire quelconque en x, y, z, t, introduite pour l'homogénéité, et qu'on choisira de manière à ne pas s'annuler au point de la surface $f = 0$ que l'on considérera.

Géométriquement, cette condition est équivalente à la suivante : il faut qu'on puisse trouver une surface $\Phi_2 = 0$ du premier faisceau, et une surface $\Psi_2 = 0$ du second, telles que la surface $\Phi_2\Psi_2 = 0$ passe par tous les points de la surface $f = 0$ situés sur la surface $St^k = 0$, et qu'elle ait avec $f = 0$, en chacun de ces points, un contact d'ordre supérieur à celui des surfaces $f = 0$, $St^k = 0$ au même point.

34. On peut encore transformer ce résultat pour lui donner une forme identique à celle du théorème du n° **6**, relatif aux intégrales abéliennes simples.

A cet effet, soit I_1 une intégrale double abélienne de la forme

$$I_1 = \int\int \frac{Q_1}{S_1}\, dX\, dY,$$

Q_1 et S_1 étant des polynômes en X, Y et Z, de degrés q_1 et s_1, et X, Y, Z étant liés par l'équation $f(X, Y, Z) = 0$.

Cherchons à déterminer les infinis de l'intégrale I_1. A cet effet, remplaçons X, Y, Z par $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$, et supposons x, y, z, t exprimés en fonction de deux paramètres, σ et ω. Il vient

$$dX\, dY = \left[\frac{\partial\left(\frac{x}{t}\right)}{\partial\omega}\frac{\partial\left(\frac{y}{t}\right)}{\partial\sigma} - \frac{\partial\left(\frac{x}{t}\right)}{\partial\sigma}\frac{\partial\left(\frac{y}{t}\right)}{\partial\omega}\right] d\sigma\, d\omega,$$

ce qui s'écrit

$$dX\, dY = \frac{d\sigma\, d\omega}{t^3}\left\{\left[t\frac{\partial x}{\partial\omega} - x\frac{\partial t}{\partial\omega}\right]\left[t\frac{\partial y}{\partial\sigma} - y\frac{\partial t}{\partial\sigma}\right] - \left[t\frac{\partial x}{\partial\sigma} - x\frac{\partial t}{\partial\sigma}\right]\left[t\frac{\partial y}{\partial\omega} - y\frac{\partial t}{\partial\omega}\right]\right\}$$

c'est-à-dire

$$(15) \qquad dX\, dY = \frac{d\sigma\, d\omega}{t^3}\begin{vmatrix} x & y & t \\ \frac{\partial x}{\partial\omega} & \frac{\partial y}{\partial\omega} & \frac{\partial t}{\partial\omega} \\ \frac{\partial x}{\partial\sigma} & \frac{\partial y}{\partial\sigma} & \frac{\partial t}{\partial\sigma} \end{vmatrix}.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{Q_1}{S_1} = \frac{1}{t^{q_1 - s_1}}\frac{Q_1}{S_1}(x, y, z, t).$$

Ces expressions montrent que les infinis de l'élément différentiel de l'intégrale I_1 sont les points de la courbe $f = 0$, $S_1 t^{q_1 - s_1 + 3} = 0$.

Nous dirons que cette courbe, ou une portion de cette courbe, est un infini d'ordre l pour l'élément différentiel si la surface $S t^{q_1 - s_1 + 3} = 0$ a, le long de cette courbe, avec $f = 0$, un contact d'ordre $l - 1$. Ainsi, en général, le long de la courbe à l'infini sur la surface $f = 0$, l'élément différentiel sera infini d'ordre $q_1 - s_1 + 3$.

Dans le cas où f'_z figure au dénominateur de l'élément différentiel, il est aisé de voir que, le long de la courbe $f = 0$, $f'_z = 0$, l'élément dif-

férentiel ne devient pas infini, parce que le déterminant qui figure dans l'expression (15) s'annule en tous les points de cette courbe qui ne sont pas des points singuliers.

Ainsi, en revenant aux notations des n^{os} **50** et suivants, l'élément différentiel

$$\frac{Q}{Sf'_Z}\,dX\,dY$$

devient infini le long de la courbe $St^{q\ s-m+k} = 0$, c'est-à-dire de la courbe $St^k = 0$; il devient en outre infini aux points singuliers de la surface $f = 0$.

Si maintenant on se reporte à la proposition du n° **55**, on voit qu'elle peut s'énoncer ainsi :

I. *La somme algébrique des valeurs que prend une intégrale double abélienne appartenant à une surface algébrique*

$$f(X, Y, Z) = 0,$$

dans les polygones découpés sur cette surface par deux surfaces quelconques d'un premier faisceau ponctuel et deux surfaces quelconques d'un deuxième faisceau est égale à zéro, s'il existe une surface Σ, *formée par l'ensemble d'une surface du premier faisceau et d'une surface du second, passant par tous les points de la surface* $f = 0$, *qui rendent l'élément de l'intégrale infini, avec la condition d'avoir avec la surface* $f = 0$, *en tout point de cette surface qui est infini d'ordre* l *pour l'élément de l'intégrale, un contact d'ordre* $l - 1$.

De plus, quand l'intégrale est sous la forme $\int\int \frac{Q}{Sf'_Z}\,dX\,dY$, il n'y a pas, dans l'énoncé précédent, à tenir compte de ceux des infinis de l'élément différentiel qui annulent f'_Z, même s'ils correspondent à des points singuliers de la surface $f = 0$.

Dans le cas où les surfaces $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ forment deux systèmes algébriques quelconques, il faut que la condition précédente soit remplie, quels que soient les paramètres u et v, par la surface $\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v} = 0$, comme le montre la formule (12).

55. On peut signaler, en raison de l'intérêt géométrique de ses applications, un nouveau cas particulier, où la somme algébrique des intégrales doubles I, au lieu d'être nulle comme dans l'exemple précédent, s'exprime en fonction rationnelle et logarithmique des paramètres u et v.

Soit, pour fixer les idées, l'intégrale

$$I = \int\int \frac{Q}{Sf^2}\, dX\, dY,$$

où le degré de $\frac{Q}{Sf^2}$ est égal à -3; et soit posé

$$S = R^\alpha T^\beta \ldots.$$

Les infinis de l'élément différentiel sont les points communs à $f = 0$ et aux surfaces $R = 0$, $T = 0$, ...

Imaginons que, parmi les surfaces de l'un des faisceaux sécants, il en existe une passant par les courbes d'intersection de $f = 0$ et des surfaces $R = 0$, $T = 0$, ..., soit par exemple

$$\Phi_2 = Af + BRT \ldots.$$

Nous ne supposons pas que cette surface ait avec $f = 0$, le long de ces courbes, des contacts d'ordre plus ou moins élevé, comme on l'admettait dans le théorème précédent.

L'intégrale K est ici

$$K = \int\int du\, dv \sum \frac{Q\Psi_2 BRT \ldots}{S\Delta} = \int\int du\, dv \sum \frac{Q\Psi_2 B}{R^{\alpha-1} T^{\beta-1} \ldots \Delta}.$$

Nous avons supprimé au numérateur de la somme Σ le terme Af, parce que la somme s'étend aux points communs aux trois surfaces $f = 0$, $\Phi_1 + u\Phi_2 = 0$, $\Psi_1 + v\Psi_2 = 0$.

La proposition que nous allons établir est que l'intégrale K est une fonction entière de u, et une fonction rationnelle et logarithmique de v.

On a, en effet, en remarquant qu'en vertu de l'hypothèse faite sur le degré de $\frac{Q}{Sf^2}$ le numérateur de la quantité sous le signe Σ est de degré

inférieur au dénominateur et en appliquant la formule (10) du n° **27**.

$$\sum \frac{Q\Psi_2 B}{\Delta R^{\alpha-1}T^{\beta-1}\ldots} + \sum \rho_R + \sum \rho_T + \ldots = 0,$$

$\Sigma\rho_R$, $\Sigma\rho_T$, ... désignant les sommes des résidus, par rapport aux zéros de R, T, ..., de la fonction

$$\Theta(\lambda) = \frac{Q\Psi_2 B}{(f'_z\Psi'_y - f'_y\Psi'_z)[\Phi_1 + u\Phi_2]} \frac{x't - xt'}{R^{\alpha-1}T^{\beta-1}\ldots}.$$

Dans cette fonction, x, y, z, t sont les coordonnées, exprimées en fonction thêtafuchsienne de λ, d'un point de la courbe $f = 0$, $\Psi = 0$. Si l'on remarque maintenant que Φ_2 s'annule pour les points de cette courbe situés sur les surfaces $R = 0$, $T = 0$, ..., on voit que dans les résidus de $\Theta(\lambda)$ par rapport aux zéros de R, T, ..., u ne figurera pas au dénominateur, car il n'entre, au dénominateur, que dans des puissances de la fonction $\frac{1}{\Phi_1 + u\Phi_2}$, fonction prise en un point commun à la courbe $f = 0$, $\Psi = 0$ et à l'une des surfaces $R = 0$, $T = 0$, ... Comme pour ces points Φ_2 s'annule, u ne figurera pas au dénominateur.

On voit ainsi que la somme

$$\sum \frac{Q\Psi_2 B}{\Delta R^{\alpha-1}T^{\beta-1}\ldots},$$

qui est une fonction rationnelle de u et de v, est une fonction entière de u. Il serait aisé de préciser son degré en u; nous en donnerons des exemples dans les applications.

Cette fonction est donc de la forme

$$\mathcal{F}_0(v) + u\mathcal{F}_1(v) + u^2\mathcal{F}_2(v) + \ldots,$$

$\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots$ étant des fonctions rationnelles de v. On a donc

$$\begin{aligned} K &= \int_{u_0}^{u}\int_{v_0}^{v} du\,dv\,[\mathcal{F}_0(v) + u\mathcal{F}_1(v) + \ldots] \\ &= (u - u_0)\int \mathcal{F}_0(v)\,dv + \frac{u^2 - u_0^2}{2}\int \mathcal{F}_1(v)\,dv + \ldots \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Dans le cas où la surface du second faisceau $\Psi_2 = 0$ passe également par les courbes situées sur $f = 0$ rendant l'intégrale I infinie, on voit de même que K est une fonction entière de v; cette intégrale est alors fonction entière des paramètres u et v.

On aurait un résultat analogue si $\frac{Q}{Sf_Z'}$ était de degré supérieur à -3.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

II. *La somme algébrique des valeurs que prend une intégrale double abélienne, appartenant à une surface $f(X, Y, Z) = 0$, dans les polygones découpés sur cette surface par deux surfaces quelconques d'un premier faisceau $\Phi_1 + u\Phi_2 = 0$, et deux surfaces quelconques d'un autre faisceau, $\Psi_1 + v\Psi_2 = 0$, est une fonction entière du paramètre u et une fonction rationnelle et logarithmique du paramètre v, si la surface $\Phi_2 = 0$ du premier faisceau passe par tous les points de la surface $f = 0$ qui rendent l'élément de l'intégrale infini.*

Si la surface $\Psi_2 = 0$ du second faisceau satisfait également à la même condition, la somme précédente est une fonction entière des deux paramètres u et v.

36. On a un résultat semblable dans le cas où les surfaces $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ forment deux systèmes algébriques quelconques.

La somme des intégrales I sera une fonction entière de u et une fonction rationnelle et logarithmique de v si la surface $\frac{\partial\Phi}{\partial u} = 0$ passe, quel que soit u, par tous les points rendant l'élément différentiel infini.

Si $\Phi = Au^\rho + Bu^{\rho-1} + \ldots + Ku + L$, il faut pour cela que les surfaces $A = 0$, $B = 0$, ..., $K = 0$ passent par ces points.

V. — Le théorème d'Abel pour les intégrales de différentielles totales.

37. Soit toujours $f(X, Y, Z) = 0$ l'équation d'une surface algébrique de degré m; considérons l'intégrale, appartenant à cette surface,

$$I = \int \frac{Q(X, Y, Z)}{S(X, Y, Z)} dX + \frac{R(X, Y, Z)}{T(X, Y, Z)} dY,$$

Q, R, S, T étant des polynômes de degrés q, r, s, t, et les fractions rationnelles $\frac{Q}{S}$, $\frac{R}{T}$ satisfaisant à la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{Q}{S}\right) = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{R}{T}\right).$$

On suppose, dans cette intégrale, que Z est une fonction de X et Y, satisfaisant à l'équation $f(X, Y, Z) = 0$.

Cela posé, soient deux systèmes de surfaces algébriques

$$\Phi(X, Y, Z, u) = 0, \qquad \Psi(X, Y, Z, v) = 0,$$

dont les équations, de degrés m et p en X, Y, Z, renferment respectivement deux paramètres u et v.

Considérons deux surfaces du premier système, correspondant aux valeurs u_0 et u_1 du paramètre u, et de même deux surfaces du second, correspondant aux valeurs v_0 et v_1; proposons-nous d'évaluer la somme des intégrales I, dont les limites inférieures sont les valeurs de X et Y qui correspondent aux points communs à $f = 0$ et aux surfaces de paramètres u_0 et v_0, et dont les limites supérieures sont les valeurs de X et Y correspondant aux points communs à $f = 0$ et aux surfaces de paramètres u_1 et v_1.

Soient u et v des valeurs des paramètres, comprises respectivement entre u_0 et u_1, v_0 et v_1; transformons l'intégrale I en prenant pour variables u et v à la place de X et Y.

On a les relations

$$f(X, Y, Z) = 0, \qquad \Phi(X, Y, Z, u) = 0, \qquad \Psi(X, Y, Z, v) = 0:$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial X} dX + \frac{\partial f}{\partial Y} dY + \frac{\partial f}{\partial Z} dZ = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} dX + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -\frac{\partial \Phi}{\partial u} du,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial X} dX + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -\frac{\partial \Psi}{\partial v} dv.$$

On tire de là

$$\Delta\, dX = \frac{\partial\Phi}{\partial u}\left\{\frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial\Psi}{\partial Z} - \frac{\partial f}{\partial Z}\frac{\partial\Psi}{\partial Y}\right\} du$$
$$+ \frac{\partial\Psi}{\partial v}\left\{\frac{\partial f}{\partial Z}\frac{\partial\Phi}{\partial Y} - \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial\Phi}{\partial Z}\right\} dv$$

et

$$\Delta\, dY = \frac{\partial\Phi}{\partial u}\left\{\frac{\partial f}{\partial Z}\frac{\partial\Psi}{\partial X} - \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial\Psi}{\partial Z}\right\} du$$
$$+ \frac{\partial\Psi}{\partial v}\left\{\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial\Phi}{\partial Z} - \frac{\partial f}{\partial Z}\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right\} dv,$$

Δ désignant toujours le déterminant $\sum \pm \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\frac{\partial\Psi}{\partial Z}$. On a donc, pour l'élément de l'intégrale I,

$$\frac{Q}{S}dX + \frac{R}{T}dY = \frac{\partial\Phi}{\partial u}\left[\frac{Q}{S\Delta}M_1 + \frac{R}{T\Delta}N_1\right] du + \frac{\partial\Psi}{\partial v}\left[\frac{Q}{S\Delta}M_2 + \frac{R}{T\Delta}N_2\right] dv,$$

M_1, N_1; M_2, N_2 étant les coefficients de $\frac{\partial\Phi}{\partial u}du$ et $\frac{\partial\Psi}{\partial v}dv$ dans les valeurs de $\Delta\, dX$ et $\Delta\, dY$.

La somme de ces éléments, pour les points communs à la surface $f = 0$ et aux surfaces $\Phi(X, Y, Z, u) = 0$, $\Psi(X, Y, Z, v) = 0$, est donc de la forme

$$(16) \qquad du \sum \frac{G\frac{\partial\Phi}{\partial u}}{ST\Delta} + dv \sum \frac{H\frac{\partial\Psi}{\partial v}}{ST\Delta},$$

les sommes s'étendant aux points communs aux trois surfaces.

On est donc encore ramené au calcul de sommes analogues à celles que nous avons si souvent introduites dans ce travail, et ce calcul se fera par l'application de la formule générale du n° **27**.

Il est clair d'ailleurs que chacune des sommes qui figurent dans l'expression (16) est une fonction rationnelle de u et de v, et l'on en conclut aisément que l'intégrale de cette expression est une fonction rationnelle et logarithmique de u et de v.

En effet, soit la fonction

$$J = \int M(u, v)\, du + N(u, v)\, dv,$$

où M et N sont rationnels.

On a

$$J = \int_{u_0}^{u} M(u, v)\,du + \int_{v_0}^{v} N(u_0, v)\,dv.$$

La première intégrale étant une fonction rationnelle et logarithmique de u, et la seconde étant indépendante de u, on voit bien que J est fonction rationnelle et logarithmique de u et, par suite, de v, puisqu'on peut répéter pour v le raisonnement fait pour u. C'est l'extension évidente du théorème d'Abel aux intégrales de différentielles totales.

Le cas où les surfaces $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ appartiennent respectivement à un faisceau ponctuel donne des résultats simples.

Soit toujours

$$\Phi = \Phi_1 + u\,\Phi_2,$$
$$\Psi = \Psi_1 + v\,\Psi_2.$$

L'intégrale à calculer est

$$J = \int du \sum \frac{G\Phi_2}{ST\Delta} + dv \sum \frac{H\Psi_2}{ST\Delta}.$$

On arrive sans difficulté, en répétant les raisonnements faits dans le paragraphe précédent, aux propositions suivantes.

Soit l'intégrale

$$I = \int \frac{Q}{S}\,dX + \frac{R}{T}\,dY.$$

que nous ramènerons à la forme

$$I = \int \frac{M_1\,dX - N_1\,dY}{S_1}.$$

Nous appellerons infini de l'élément de I, en désignant par m_1, n_1, s_1 les degrés de M_1, N_1, S_1, les infinis des fonctions

$$\frac{M_1(x, y, z, t)}{S_1(x, y, z, t)}\,\frac{1}{t^{m_1 - s_1 + 2}}, \qquad \frac{N_1(x, y, z, t)}{S_1(x, y, z, t)}\,\frac{1}{t^{m_1 - s_1 + 2}}.$$

L'ordre d'un infini, défini comme au n° **54**, sera l'ordre de cet infini dans celle des deux fonctions qui l'admet avec l'ordre le plus élevé.

I. *La somme des valeurs des intégrales* I, *dont les limites inférieures sont les valeurs de* X, Y, Z *qui correspondent aux points d'intersection de la surface* $f = 0$ *avec deux surfaces* $\Phi_1 + u_0\Phi_2 = 0$, $\Psi_1 + v_0\Psi_2 = 0$, *et dont les limites supérieures sont les valeurs qui correspondent aux points d'intersection de* $f = 0$ *avec les surfaces* $\Phi_1 + u\Phi_2 = 0$, $\Psi_1 + v\Psi_2 = 0$, *est nulle si l'une des surfaces du faisceau* $\Phi_1 + v\Phi_2 = 0$ *et l'une des surfaces du faisceau* $\Psi_1 + v\Psi_2 = 0$ *passent par les points de la surface* $f = 0$ *qui rendent l'élément de l'intégrale* I *infini, avec la condition d'avoir avec la surface* $f = 0$, *en tout point de cette surface qui est pour l'élément de* I *un infini d'ordre* l, *un contact d'ordre* $l - 1$.

II. *La somme des valeurs précédentes des intégrales* I *sera une fonction entière de* u *si la surface* $\Phi_2 = 0$ *passe simplement par les points de* $f = 0$ *qui rendent l'élément de l'intégrale infini.*

Elle sera de même une fonction entière de v *si la surface* $\Psi_2 = 0$ *satisfait à la même condition.*

On a des résultats analogues dans le cas où les surfaces $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ appartiennent à deux systèmes algébriques quelconques.

(*A suivre.*)

Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables (¹);

PAR M. ÉMILE PICARD.

INTRODUCTION.

La théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes a déjà fait l'objet d'importants travaux, parmi lesquels il convient de citer tout particulièrement les mémorables recherches de M. Nœther (*Math. Annalen*, t. II à XI). L'éminent géomètre a principalement étudié la question au point de vue algébrique, en approfondissant l'étude de ces polynômes adjoints d'ordre $m-4$ (m désignant le degré de la surface), qui sont les analogues des polynômes adjoints d'ordre $m-3$, jouant un rôle si important dans la théorie des courbes planes algébriques. Il est arrivé ainsi à la notion de deux nombres invariantifs fondamentaux. Le premier, désigné par p et communément appelé *genre* de la surface (*Flächengeschlecht*), est égal au nombre des paramètres arbitraires figurant dans les polynômes adjoints Q d'ordre $m-4$. Le second nombre, désigné par p_1 (*Curvengeschlecht*), représente le genre de la courbe mobile d'intersection de la surface donnée avec les surfaces représentées par l'équation $Q=0$.

Dans la théorie des courbes algébriques, on ne s'est pas borné au point de vue algébrique, et la considération de certaines expressions

(¹) Mémoire couronné par l'Académie des Sciences (grand prix des Sciences mathématiques, 1888).

transcendantes attachées à la courbe présente le plus grand intérêt. Ces transcendantes sont, comme on sait, les intégrales de la forme

$$\int^{x} R(x, y)\, dx,$$

R étant une fonction rationnelle des coordonnées x et y, liées par la relation qui définit la courbe $f(x, y) = 0$.

Une première extension du point de vue transcendant a été faite par M. Nœther, qui a, dans un de ses Mémoires (*Math. Annalen*, t. II), considéré les intégrales doubles

$$\int\int \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f_z},$$

Q étant toujours un polynôme adjoint d'ordre $m - 4$. La considération de ces intégrales va jouer un rôle capital dans différentes parties de ce Mémoire. On pourrait les appeler des intégrales doubles de première espèce attachées à la surface. On peut, en effet, montrer que ces intégrales restent toujours finies, quel que soit le champ de l'intégration.

L'extension du point de vue transcendant aux surfaces algébriques peut se faire, d'une autre manière, en considérant les *intégrales de différentielles totales* de la forme

$$\int^{x, y} P\, dx + Q\, dy,$$

P et Q étant des fonctions rationnelles de x, y, z liées par la relation qui définit la surface $f(x, y, z) = 0$.

C'est de l'étude de ces intégrales que nous nous sommes tout d'abord occupé. Nous les partageons en intégrales de première, seconde et troisième espèce, comme dans la théorie des courbes algébriques. Nous avions déjà commencé cette étude dans deux Mémoires du *Journal de Mathématiques* (1885 et 1886). Nous reprenons entièrement ici la théorie des intégrales de seconde espèce, dont plusieurs points avaient besoin d'être précisés. Nous établissons d'abord que de telles intégrales n'existent pas, *en général*, pour une surface algébrique, je veux dire qu'il n'y a pas, pour une surface arbitraire, d'autres intégrales de

seconde espèce que des fonctions rationnelles des coordonnées. Laissant celles-ci de côté, il faut reconnaître si une surface donnée admet des intégrales de seconde espèce, et apprendre à les former si elles existent. C'est à ce problème qu'est consacrée la plus grande partie du premier Chapitre de ce Mémoire. Nous ramenons sa solution à une question d'une tout autre nature, à l'étude des intégrales rationnelles d'une équation différentielle linéaire. Avant d'approfondir davantage la théorie des intégrales de seconde et de troisième espèce, nous avons dû étudier une question capitale en elle-même, c'est celle *des cycles des surfaces algébriques;* elle fait l'objet du second Chapitre.

On connaît toute l'importance de la théorie des cycles dans l'étude des courbes algébriques. La pensée d'édifier une théorie analogue pour les surfaces algébriques se présentait naturellement : c'est ce que j'ai essayé de faire. Mais tout d'abord il convient de remarquer que la généralisation peut se faire dans deux directions différentes; il y a à considérer pour les surfaces *des cycles à une dimension ou linéaires,* et *des cycles à deux dimensions;* d'où deux théories entièrement distinctes.

En pénétrant dans la première étude, on rencontre dès le début un résultat au premier abord inattendu : c'est qu'en général, pour une surface algébrique, *il n'y a pas de cycles linéaires,* je veux dire qu'ils se réduisent tous à des cycles nuls. Il y a cependant des surfaces possédant effectivement des cycles linéaires, et le problème se pose de rechercher les cycles distincts d'une surface algébrique. Dans cette difficile question, la *réductibilité* d'une certaine équation différentielle linéaire joue un rôle essentiel. Au point de vue pratique, les méthodes que nous proposons seraient, sans doute, d'une pénible application, mais notre principal objet a été de jeter quelque lumière sur une théorie entièrement nouvelle.

Relativement *aux cycles à deux dimensions,* nous avons cherché à montrer à quel problème, relatif aux équations linéaires, pouvait être ramenée leur étude. Ces cycles existent d'ailleurs en général; c'est donc là qu'on trouvera la véritable généralisation de la théorie des cycles des courbes algébriques, que n'ont pu donner, comme on vient de le voir, les cycles linéaires.

On voit, par ce qui précède, les différences profondes qui séparent

la théorie des fonctions algébriques d'une variable de la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. L'analogie, qui souvent est un guide excellent, peut devenir ici bien trompeuse.

Les méthodes employées dans ce Chapitre nous ont permis de compléter la théorie des intégrales de seconde et de troisième espèce. Je citerai seulement ici le théorème suivant : *Le nombre des intégrales distinctes de seconde espèce est égal au nombre de leurs périodes.*

Nous nous occupons dans le troisième Chapitre des transformations birationnelles des surfaces en elles-mêmes. Ce Chapitre peut être considéré comme une application de nos résultats généraux sur les intégrales de différentielles totales. L'étude des transformations d'une surface en elle-même est très différente suivant le genre de la surface. Quand ce genre p est supérieur à un, les transformations ne peuvent contenir plus d'un paramètre arbitraire. Si le genre est au plus égal à un et que la surface admette un groupe continu de transformations birationnelles en elle-même, ou bien on pourra tracer sur elle un réseau de courbes du genre zéro ou un, ou bien la surface jouira de la propriété remarquable que voici : il existera deux intégrales de différentielles totales

$$P\,dx + Q\,dy \qquad \text{et} \qquad P_1\,dx + Q_1\,dy,$$

telles que les deux équations

$$\begin{aligned} P\,dx + Q\,dy &= du, \\ P_1\,dx + Q_1\,dy &= dv \end{aligned}$$

donneront pour x, y, z des *fonctions uniformes de u et v*. Nous étudions spécialement cette classe intéressante de surfaces, *qui sont vraiment les analogues des courbes planes de genre zéro et un.*

Dans le quatrième Chapitre, nous complétons la théorie précédente; nous faisons voir comment on pourra reconnaître si deux surfaces de genre supérieur à un se correspondent point par point, et nous établissons notamment, par deux voies différentes, que deux surfaces de genre supérieur à l'unité ne peuvent admettre une infinité *discontinue* de transformations birationnelles.

Le cinquième Chapitre a pour objet l'application de quelques-uns des résultats précédents à l'étude de certaines équations différentielles. Nous nous occupons particulièrement des équations de la forme

$$f(y, y', y'') = 0,$$

f étant un polynôme, dans le cas où l'intégrale générale est uniforme. C'est une théorie très difficile, et la raison de cette difficulté est dans le fait suivant, signalé au troisième Chapitre : une surface algébrique peut admettre une transformation *biuniforme* en elle-même, qui ne soit pas *birationnelle*, tandis que, pour les courbes algébriques au contraire, une telle transformation est nécessairement birationnelle.

Tout d'abord nous examinons le cas particulier où une certaine transformation biuniforme de la surface f serait birationnelle. Toute cette étude est intimement liée à celle des surfaces étudiées au Chapitre III ; dans ce cas, l'intégrale générale s'exprimera par des transcendantes connues. Nous avons voulu ensuite examiner le cas général, mais un point extrêmement délicat se présente. Il est relativement facile de reconnaître si l'intégrale générale est *à apparence uniforme*, c'est-à-dire est uniforme dans le voisinage de tout point à l'intérieur de la région où doit rester la variable indépendante; mais nous ne sommes pas autorisé pour cela à regarder l'intégrale générale comme une fonction uniforme. Nous avons spécialement considéré le cas où l'équation a la forme

$$y'' = R(y, y'),$$

R étant rationnelle en y et y'. Il nous a paru curieux de montrer comment on pouvait mettre l'intégrale y sous la forme d'un quotient de deux fonctions à apparence uniforme, *n'ayant plus de pôles*, fonctions que l'on peut regarder comme une généralisation des fonctions Al ou des fonctions Θ de la théorie des fonctions elliptiques.

Nous considérons aussi les équations plus générales

$$f(x, y, y', y'') = 0,$$

où f est un polynôme en y, y' et y'', dans l'hypothèse où les points

critiques de l'intégrale générale seraient fixes. C'est l'extension au second ordre du problème posé par M. Fuchs pour les équations du premier ordre, problème sur lequel M. Poincaré a écrit quelques pages si remarquables. Ici encore une certaine transformation biuniforme joue un rôle essentiel; nous ne nous occupons que du cas où cette transformation serait birationnelle.

Dans le sixième Chapitre, nous généralisons la notion d'intégrale de première espèce en envisageant les fonctions u de (x, y, z) qui se transforment en $au + b$ (a et b étant des constantes), quand (x, y, z) décrit un cycle linéaire effectif de la surface. Une pareille généralisation peut aussi être faite pour les courbes algébriques; nous lui consacrons quelques pages au début du Chapitre.

CHAPITRE I.

INTÉGRALES DE DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

I. — Généralités.

1. Étant donnée une surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0,$$

nous allons considérer les intégrales de différentielles totales de la forme

$$\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx + Q\,dy, \tag{1}$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles de x, y et z. On suppose, bien entendu, que la condition d'intégrabilité est satisfaite; l'intégrale précédente est alors une fonction du point analytique (x, y, z), et en

un point (x, y, z) les diverses valeurs de l'intégrale ne diffèrent que d'une somme de multiples de périodes.

Les intégrales précédentes peuvent être partagées en trois espèces.

Les intégrales de première espèce sont celles qui restent finies pour tout système de valeurs des variables indépendantes x et y.

Nous allons, pour le moment, définir comme il suit les intégrales de seconde espèce : considérons les courbes le long desquelles l'intégrale devient infinie. Soit C une de ces courbes, et supposons qu'elle soit une courbe simple de la surface; je prends alors un cycle infiniment petit *entourant* cette courbe en un point arbitraire (on peut, par exemple, donner à y une valeur fixe, et considérer dans le plan de la variable x un contour infiniment petit autour d'un point de la courbe C, répondant à la valeur prise pour y); si l'intégrale le long de ce cycle est nulle, nous dirons que la courbe C est une courbe polaire. *Une intégrale de seconde espèce ne possède que des courbes polaires.*

Il a été supposé que la courbe C était une courbe simple de la surface. Le cas où elle serait une courbe multiple ne donne lieu à aucune difficulté; nous pouvons en effet, comme l'a montré M. Nœther (*Göttingen Nachrichten*, p. 267; 1871), résoudre cette singularité par une transformation rationnelle. La courbe C se transformera ainsi en plusieurs courbes simples.

On pourrait encore dire que l'intégrale (1) sera une intégrale de seconde espèce, au sens habituel de la théorie des courbes algébriques, pour une section plane quelconque de la surface [1].

Si l'intégrale le long d'un contour infiniment petit, analogue à celui dont nous avons parlé, n'est pas nulle, cette courbe C sera dite une courbe logarithmique, *et l'intégrale sera de troisième espèce.*

Dans le cas des intégrales de troisième espèce, à une courbe logarithmique correspond évidemment une période. Une telle période sera dite une *période polaire*.

2. Une première remarque va nous être fort utile dans l'étude des

---

[1] Nous aurons à revenir ultérieurement sur cette définition des intégrales de seconde espèce, où nous ne nous sommes pas occupé des points singuliers isolés de la surface (Chap. II), où l'intégrale pourrait devenir infinie.

intégrales précédentes. Soit l'intégrale de différentielle totale

$$\int P\,dx + Q\,dy;$$

j'envisage l'intégrale

$$(2) \qquad \int P(x, y, z)\,dx$$

comme une intégrale abélienne attachée à la relation entre x et z

$$f(x, y, z) = 0;$$

la lettre y dans l'intégrale (2), comme dans cette dernière équation, est considérée comme un paramètre, d'ailleurs arbitraire. Les périodes de l'intégrale (2) seront nécessairement des périodes de l'intégrale (1), car elles correspondent à un cycle dans lequel y reste constant; *ces périodes ne dépendent donc pas du paramètre y.*

Cela posé, considérant toujours la courbe f avec le paramètre y, soit

$$I = \int \varphi(x, y, z)\,dx,$$

φ étant rationnelle en x, y, z, une intégrale abélienne de la courbe f n'ayant pas pour y arbitraire de périodes polaires, c'est-à-dire une intégrale de première ou de seconde espèce. Les périodes de l'intégrale I peuvent être regardées comme une fonction de y, et M. Fuchs a montré (*Journal de Crelle*, t. 73) qu'elles satisfont à une équation linéaire dont les coefficients sont des polynômes en y, et dont l'ordre est au plus égal au genre de la relation f, et est même égal à ce genre si l'intégrale est prise arbitrairement. Le groupe de cette équation sera évidemment indépendant de la fonction φ, et *chaque substitution linéaire de ce groupe revient à une transformation des cycles de la fonction algébrique z de x.*

Si la surface $f(x, y, z) = 0$ est la plus générale de son degré, l'ordre de l'équation sera égal au genre de cette relation entre x et z, et les substitutions du groupe de cette équation linéaire seront à coefficients entiers.

Considérons un instant un cas très particulier; soit

$$z^2 = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{2p})(x - y),$$

où les a sont des constantes distinctes. Prenons les périodes de l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x - a_1)\ldots(x - a_{2p})(x - y)}};$$

elles satisfont à une équation d'ordre $2p$, qui rentre d'ailleurs dans le type hypergéométrique d'ordre supérieur, et ses points critiques sont

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2p} \quad \text{et} \quad \infty.$$

De plus, dans le voisinage de $y = \infty$, les racines de l'équation fondamentale déterminante de M. Fuchs sont

$$r = \tfrac{1}{2}, \qquad r' = p - \tfrac{1}{2},$$

la première étant d'ordre $2p - 1$; donc l'équation aux multiplicateurs de la substitution correspondante aura une racine multiple *d'ordre* $2p$, égale à -1.

Cette dernière remarque nous montre que, si l'on considère une substitution arbitraire du groupe de l'équation, soit

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} \omega_1 = m_1^1\,\omega_1 + m_1^2\omega_2 + \ldots + m_1^{2p}\omega_{2p}, \\ \omega_2 = m_2^1\,\omega_1 + m_2^2\omega_2 + \ldots + m_2^{2p}\omega_{2p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega_{2p} = m_{2p}^1\omega_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + m_{2p}^{2p}\omega_{2p}, \end{array}\right.$$

l'équation aux multiplicateurs

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} m_1^1 - S & m_1^2 & m_1^{2p} \\ m_2^1 & m_2^2 - S & m_2^{2p} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ m_{2p}^1 & \ldots\ldots & m_{2p}^{2p} - S \end{vmatrix} = 0$$

n'admettra pas la racine $S = 1$, puisque, dans le cas particulier considéré, on a l'unique racine, d'ordre $2p$, $S = -1$.

Ce qui vient d'être vérifié dans ce cas particulier s'applique évidemment au cas général, c'est-à-dire que, si nous revenons à l'intégrale I, la surface

$$f(x, y, z) = 0$$

étant la plus générale de degré m, et la substitution (3) désignant une substitution arbitraire du groupe de l'équation linéaire E, d'ordre $2p$, correspondante, l'équation (4) ne sera pas vérifiée pour $S = 1$.

5. Cette remarque faite, soit

$$\int P\,dx + Q\,dy$$

une intégrale de différentielle totale de première ou de seconde espèce, correspondant à la surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

la plus générale de son degré.

Les périodes de $\int P\,dx$ sont des quantités indépendantes de y,

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{2p},$$

mais la transformation des cycles correspondant à une substitution quelconque donne, puisque ces quantités sont des constantes, les relations

$$\begin{aligned}
a_1 &= m_1^1 a_1 + m_1^2 a_2 + \ldots + m_1^{2p} a_{2p},\\
a_2 &= m_2^1 a_1 + m_2^2 a_2 + \ldots + m_2^{2p} a_{2p},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{2p} &= m_{2p}^1 a_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + m_{2p}^{2p} a_{2p},
\end{aligned}$$

équations qui, d'après la remarque de la fin du paragraphe précédent, doivent nécessairement donner

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad a_{2p} = 0.$$

Les périodes de l'intégrale sont donc nulles.

Par suite, si elle est de première espèce, l'intégrale se réduira à une

constante, et si elle est une intégrale de seconde espèce, ce sera une fonction rationnelle de x, y et z.

Ainsi se trouvent établis bien rapidement les deux théorèmes que j'ai énoncés et démontrés précédemment, concernant les intégrales de première et de seconde espèce, attachées à la surface la plus générale de degré m.

4. On peut établir pour les intégrales de *troisième* espèce une proposition analogue à la précédente. Nous avons dit (n° **1**) ce qu'on devait entendre par période polaire d'une telle intégrale; une période polaire provient d'un cycle infiniment petit autour d'un point quelconque d'une courbe logarithmique de l'intégrale.

Une intégrale de troisième espèce peut, *a priori*, avoir d'autres périodes que des périodes polaires, mais nous allons montrer qu'il n'en est cependant pas ainsi en général. Nous établirons, à cet effet, que si la surface f est la plus générale de son degré, *les périodes de toute intégrale de troisième espèce se réduisent aux périodes polaires.*

Il sera plus net de commencer la démonstration par un cas particulier; ce sera celui de la surface

$$z^2 = f(x, y),$$

où f est le polynôme général de degré m en x et y.

La forme générale des intégrales de différentielles totales correspondant à cette surface sera

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{M\sqrt{f(x, y)}},$$

P, Q, M désignant des polynômes en x et y, en laissant seulement de côté un terme de la forme

$$R(x, y) + A \log R_1(x, y),$$

où R et R_1 sont des fractions rationnelles en x et y, et où A est une constante. La condition d'intégrabilité s'écrira

$$M\left(P\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2f(x, y)\left[M\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + Q\frac{\partial M}{\partial x} - P\frac{\partial M}{\partial y}\right].$$

Supposons que $M(x, y)$ ne soit pas divisible par $f(x, y)$ et soit, par suite, premier avec lui. Comme on a pu faire d'abord sur x et y une transformation linéaire quelconque, on peut supposer que la courbe

$$M(x, y) = 0$$

ne rencontre pas la courbe $f(x, y) = 0$ (qui n'a que des points simples) en un point où l'on ait

$$\text{soit} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \text{soit} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Ceci posé, considérons l'intégrale fonction de x

$$\int \frac{P\,dx}{M\sqrt{f(x, y)}};$$

nous avons dit que ses périodes ne dépendent pas de y.

Donnons à y une valeur arbitraire y_0, l'équation

$$f(x, y_0) = 0$$

aura m racines distinctes entre elles,

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_m$$

et distinctes des racines de l'équation $M(x, y) = 0$.

Les périodes cycliques de l'intégrale proviendront des intégrales prises le long de courbes joignant les points

$$x_1 x_2, \quad x_2 x_3, \quad \ldots, \quad x_{m-1} x_m,$$

ces courbes étant considérées comme doubles ou, pour plus de précision, le long de contours s'éloignant peu de ces courbes doubles et enveloppant respectivement x_1 et x_2, x_2 et x_3, ...

Il existera un certain nombre de valeurs singulières de y, pour lesquelles l'équation $f(x, y) = 0$ aura une racine double.

Soit $y = b$ une telle valeur, l'équation

$$f(x, b) = 0$$

aura une racine double et une seule; soit $x = a$. Je dis que

$$P(a, b) = 0.$$

En effet, d'après ce que nous avons supposé, $M(a, b)$ n'est pas nul, et par suite, en se reportant à la condition d'intégrabilité,

$$P(a, b) f'_y(a, b) = 0;$$

or le second facteur ne peut être nul, puisque la courbe n'a pas de points multiples : donc $P(a, b) = 0$.

Cette remarque faite, nous pouvons supposer les racines $x_1, \ldots, x_m$ rangées dans un ordre tel que, y allant de y_0 à la valeur singulière b, par un chemin convenable, x_1 et x_2 deviennent égales; puis ensuite, y allant de y_0 à une autre valeur singulière, x_2 et x_3 deviennent égales, et ainsi de suite; y allant de y_0 à b, les racines deviennent, pour $y = b$,

$$x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_m,$$

et l'on aura

$$x'_1 = x'_2 = a,$$

les autres racines étant distinctes. Si nous faisons $y = y_0$, on a pour un système de coupures joignant

$$x_1 x_2, \quad x_2 x_3, \quad \ldots$$

un système de périodes; on peut supposer que ces coupures se déforment d'une manière continue quand y varie de y_0 à b, sans rencontrer les courbes décrites par les racines de l'équation $M(x, y) = 0$.

Je dis que la période relative à $x_1 x_2$ est nulle; en effet, elle reste constante quand y varie; or, pour $y = b$, on a

$$x'_1 = x'_2 = a,$$

et $\sqrt{f(x, b)}$ contient $x - a$ en facteur.

Mais il en est de même du numérateur, puisque $P(a, b) = 0$; par suite, l'intégrale prise le long d'une petite courbe enveloppant le point a est nulle, et il en est par suite de même de la période cyclique initiale, correspondant à y arbitraire. Le théorème est démontré.

5. La méthode de démonstration employée dans le cas particulier qui précède peut être suivie pour la surface la plus générale

$$f(x, y, z) = 0.$$

Soit

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{M f'_z}$$

l'intégrale considérée, P, Q et M étant des polynômes en x et y; M est un polynôme de degré μ; le degré de P est $\mu + m - 2$ par rapport à x, y et z et $\mu + m - 3$ par rapport à x et z; pareillement le degré de Q est $\mu + m - 2$ en x, y et z, et $\mu + m - 3$ en y et z. L'intégrale aura une ou plusieurs courbes logarithmiques situées sur la surface $M = 0$; on peut supposer que pour ces courbes on n'a pas $f'_z = 0$, puisqu'il suffirait de faire une substitution linéaire sur x, y et z pour éviter cet inconvénient.

Écrivons la condition d'intégrabilité qui va nous être utile dans un instant : ce sera, en posant $\frac{P}{M} = P_1$, $\frac{Q}{M} = Q_1$,

$$\begin{aligned} &f'_z\left(\frac{\partial P_1}{\partial y} f'_z - \frac{\partial P_1}{\partial z} f'_y\right) - P_1 (f''_{zy} f'_z - f''_{zz} f'_y) \\ &\quad - \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} f'_z - \frac{\partial Q_1}{\partial z} f'_x\right) f'_z + Q_1 (f''_{zx} f'_z - f''_{zz} f'_x) = 0. \end{aligned}$$

Considérons maintenant les deux relations

$$f(x, y, z) = 0, \qquad f'_z(x, y, z) = 0;$$

on peut les regarder comme définissant un point analytique (z, x), fonction algébrique de la variable y.

Il y aura certaines valeurs de y pour lesquelles deux valeurs de (z, x) et deux seulement (le polynôme f étant le plus général de son degré) deviendront égales. Soient, pour une valeur arbitraire et non singulière y_0 de y,

$$(z_1, x_1), \quad (z_2, x_2), \quad \ldots, \quad (z_N, x_N)$$

les N déterminations de (z, x). On peut les supposer rangées dans un

ordre tel que, y allant de y_0 à une certaine valeur singulière b de y,

$$(z_1, x_1) \quad \text{et} \quad (z_2, x_2)$$

deviennent égaux; puis ensuite, y allant de y_0 à une autre valeur singulière convenable,

$$(z_2, x_2) \quad \text{et} \quad (z_3, x_3)$$

deviennent égaux; et ainsi de suite pour

$$(z_3, x_3), \quad \text{et} \quad (z_4, x_4), \quad \ldots, \quad (z_{N-1}, x_{N-1}) \quad \text{et} \quad (z_N, x_N);$$

y allant de y_0 et arrivant à la première valeur singulière b, les points analytiques (z, x) varieront et deviendront

$$(z'_1, x'_1), \quad (z'_2, x'_2), \quad \ldots, \quad (z'_N, x'_N)$$

et l'on aura

$$(z'_1, x'_1) = (z'_2, x'_2) = (c, a).$$

Le point (a, b, c) est, en langage géométrique, un point de la surface f où le plan tangent est parallèle au plan des xz. On aura donc

$$f(a, b, c) = 0, \qquad f'_z(a, b, c) = 0, \qquad f'_a(a, b, c) = 0.$$

En nous reportant à la condition d'intégrabilité, on conclut que

$$P_1(a, b, c)\, f''_{z^2}(a, b, c)\, f'_y(a, b, c) = 0;$$

mais les deux derniers facteurs ne sont pas nuls, à cause de l'hypothèse faite sur la surface f; nous avons donc

$$P_1(a, b, c) = 0.$$

Il nous faut maintenant étudier la relation algébrique entre z, x pour une valeur arbitraire y_0 de y

$$f(x, y_0, z) = 0;$$

les points analytiques (z_1, x_1), (z_2, x_2), $\ldots$, (z_N, x_N) sont les points de ramification de cette fonction. On peut tracer dans le plan de la variable complexe x un contour simple enveloppant seulement les

points x_1 et x_2, et tel qu'après un tour complet de la variable le long de ce contour toute racine z de l'équation précédente reprenne la même valeur.

En effet, l'équation

$$f(x, b, z) = 0$$

définit une courbe qui, au point $x = a$, $z = c$, a un point double dont les tangentes sont distinctes. Quand y varie, comme il a été dit, de y_0 à b, x_1 et x_2 viennent tous deux en a : or considérons un contour simple enveloppant les points x_1, x_2 et a, et n'étant traversé par aucun des chemins que décrivent les autres racines; ce contour sera un cycle pour le point analytique (x, z) défini par l'équation

$$f(x, y_0, z) = 0;$$

car, si, partant d'un point arbitraire du contour, avec une certaine racine, on obtenait au retour une autre racine, il faudrait qu'il en fût de même pour toute la succession des valeurs de y, depuis y_0 jusqu'à b; or, pour $y = b$, on revient nécessairement avec la même valeur, puisque $x = a$ n'est pas un point de ramification pour l'équation

$$f(x, b, z) = 0.$$

Considérons maintenant la surface de Riemann correspondant à la relation algébrique

$$f(x, y_0, z) = 0.$$

Nous allons tracer sur cette surface un système particulier de coupures, à savoir des arcs de courbe joignant

$$(z_1, x_1) \text{ à } (z_2, x_2), \qquad (z_2, x_2) \text{ à } (z_3, x_3), \qquad \ldots,$$
$$(z_{N-1}, x_{N-1}) \text{ à } (z_N, x_N).$$

Toutes les périodes cycliques seront données par des intégrations le long de chacune de ces coupures considérées comme lignes doubles, ou, mieux, le long de courbes fermées voisines de la coupure et analogues au contour dont j'ai parlé plus haut. Les périodes correspondant aux $N - 1$ coupures pourront d'ailleurs n'être pas toutes distinctes.

Cela dit, nous revenons à l'intégrale, fonction de x,

$$\int \frac{P\,dx}{M f'_z},$$

dont les périodes ne dépendent pas de y. Or que va devenir l'intégrale prise le long de C_1, quand $y = b$; les points (z_1, x_1) et (z_2, x_2) deviennent tous deux égaux à (a, c), et $f'_z(x, b, z)$ va contenir en facteur $x - a$; mais, et c'est là une remarque essentielle, $P(x, b, z)$ contiendra le même facteur, puisque nous avons établi que

$$P_1(a, b, c) = 0.$$

Donc le point $(x = a, z = c)$, qui cesse d'être un point de ramification, ne sera pas non plus un pôle : l'intégrale le long de C_1 sera donc nulle.

Ainsi il est démontré que *toutes les périodes cycliques de l'intégrale*

$$\int \frac{P\,dx}{M f'_z}$$

sont nulles. Il en est donc de même de celles de l'intégrale de différentielle totale, comme nous voulions l'établir.

En résumé, étant donnée une surface algébrique générale, et étant considérée une intégrale quelconque de différentielle totale, relative à cette surface, cette intégrale (à moins qu'elle ne soit une fonction rationnelle de x, y, z) aura nécessairement des courbes logarithmiques, *et les périodes polaires correspondant à ces courbes logarithmiques seront les seules périodes de l'intégrale*.

II. — Réduction des intégrales de seconde espèce.

6. Cherchons maintenant à effectuer la réduction de ces intégrales. Je prends d'abord une surface dont l'équation ait la forme

$$z^2 = f(x, y);$$

on supposera, comme il est permis, que dans le polynôme $f(x, y)$ de

degré m se trouve un terme en x^m, et que $f(x, y)$ n'admette pas de facteur carré parfait.

Soit l'intégrale de différentielle totale

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{f(x, y)}},$$

P et Q étant des polynômes en x et y. La condition d'intégrabilité peut s'écrire

$$P\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x} = 2f(x, y)\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

Soit k le degré de P et Q en x et y; supposons $k \geq m - 1$.

Si nous considérons l'intégrale (où pour un moment y n'est qu'un paramètre)

$$\int \frac{P\,dx}{\sqrt{f(x, y)}},$$

nous pouvons retrancher une expression $Cx^{k-m+1}\sqrt{f(x, y)}$ (C ne dépendant pas de x), de telle sorte que, dans la différence, P soit remplacé par un polynôme, seulement de degré $k - 1$ en x; il suffit, pour cela, que dans

$$P(x, y) - C\left[(k - m + 1)x^{k-m}f(x, y) + \frac{1}{2}x^{k-m+1}\frac{\partial f}{\partial x}\right]$$

le coefficient de x^k disparaisse. Si dans $P(x, y)$ il n'y a pas de terme en x^k, C sera nul; s'il y a un terme en x^k dans P, on aura pour C une constante, *même par rapport à* y. Retranchons alors de $\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{f(x, y)}}$ la fonction de x et y

$$Cx^{k-m+1}\sqrt{f(x, y)},$$

nous avons une intégrale

$$\int \frac{P_1\,dx + Q_1\,dy}{\sqrt{f(x, y)}},$$

où P_1 et Q_1 sont toujours de degré k en x et y, mais P_1 sera seulement de degré $k - 1$ en x. Recommençons un raisonnement analogue si $k \geq m$;

nous allons de $\int \frac{P_1\,dx}{\sqrt{f(x,y)}}$ retrancher une expression

$$Cx^{k-m}\sqrt{f(x,y)},$$

de telle sorte que, dans la différence, le numérateur soit seulement de degré $k-2$ en x. On a, pour cela, à choisir C de manière que, dans

$$P_1 - C\left[(k-m)x^{k-m-1}f(x,y) + \frac{1}{2}x^{k-m}\frac{\partial f}{\partial x}\right],$$

le terme en x^{k-1} disparaisse; C ainsi déterminé sera, en général, un polynôme du premier degré en y. Retranchons alors de $\int \frac{P_1\,dx + Q_1\,dy}{\sqrt{f(x,y)}}$ la fonction de x et y

$$Cx^{k-m}\sqrt{f(x,y)},$$

on aura

$$\int \frac{P_2\,dx + Q_2\,dy}{\sqrt{f(x,y)}},$$

P_2 et Q_2 étant toujours de degré k en x et y, mais P_2 étant seulement de degré $k-2$ en x.

En continuant ainsi, on arrivera à une intégrale que nous désignerons encore par

$$(1)\qquad \int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{f(x,y)}},$$

dans laquelle P et Q seront au plus de degré k en x et y; mais P sera seulement de degré $m-2$ par rapport à x. La condition d'intégrabilité montre alors que Q sera au plus de degré $m-1$ par rapport à x. Nous avons donc l'intégrale (1), où

$$(2)\qquad \begin{cases} P = a_0x^{m-2} + a_1x^{m-3} + \ldots + a_{m-2}, \\ Q = b_0x^{m-1} + b_1x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}, \end{cases}$$

les b et les a étant des polynômes en y. Nous pourrions partir de cette forme et effectuer une réduction analogue, en prenant pour point de départ l'intégrale

$$\int \frac{Q\,dy}{\sqrt{f(x,y)}},$$

mais nous ne gagnerions rien à cette réduction, qui élèverait le degré de P et Q par rapport à x.

Nous ferons donc seulement la réduction qui nous donne l'intégrale (1), où P et Q ont la forme (2). La condition d'intégrabilité

$$\left(P\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2f(x, y)\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

va nous donner maintenant un système d'équations différentielles linéaires ordinaires.

Nous aurons d'abord à chercher si l'on pourra satisfaire à ce système *en prenant pour*

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_{m-2}, \quad b_0, \quad b_1, \quad \ldots, \quad b_{m-1}$$

des polynômes en y.

J'avais déjà obtenu le système d'équations différentielles qui précèdent dans mon Mémoire sur les intégrales de différentielles totales de seconde espèce. On peut vérifier facilement que les intégrales de ce système sont régulières (d'après l'expression de M. Fuchs) dans le voisinage de tous leurs points critiques. C'est là un point important, car ce n'est que si toutes les intégrales sont régulières qu'on pourra reconnaître aisément si les équations admettent, comme intégrales particulières, un système de polynômes.

Cela posé, admettons que les équations différentielles soient vérifiées pour un système de polynômes (a, b); on aura alors l'intégrale

$$\int \frac{(a_0 x^{m-2} + \ldots)\,dx + (b_0 x^{m-1} + \ldots)\,dy}{\sqrt{f(x, y)}},$$

je dis qu'elle ne se réduira certainement pas à une fonction algébrique. Il faudrait, en effet, pour cela que l'intégrale, fonction de x (y étant alors un paramètre arbitraire),

$$\int \frac{a_0 x^{m-2} + \ldots + a_{m-2}}{\sqrt{f(x, y)}}\,dx,$$

fût une fonction algébrique de x. Or, si l'intégrale précédente est une

fonction algébrique, elle sera nécessairement de la forme

$$\lambda(x)\sqrt{f(x, y)},$$

$\lambda(x)$ étant un polynôme en x; mais cela est impossible, car la différentielle totale de $\lambda(x)\sqrt{f(x, y)}$ est

$$\frac{\lambda'(x)f(x, y) + \frac{1}{2}\lambda(x)\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{f(x, y)}}$$

et le degré du numérateur par rapport à x est au moins $m - 1$.

Il ne reste plus maintenant qu'à rechercher si l'intégrale obtenue n'a pas de courbe logarithmique.

Les seules courbes logarithmiques possibles sont à l'infini. Employons donc les coordonnées homogènes x, y, z et t; l'équation de la surface deviendra

$$z^2 t^{m-2} = f(x, y, t);$$

pour $t = 0$, nous avons le système de *droites*

$$f(x, y, 0) = 0.$$

Ces m droites peuvent être des courbes logarithmiques de l'intégrale; nous aurons à écrire ou à vérifier que la période polaire correspondant à chacune d'elles est nulle. Il n'y aura ainsi bien évidemment que $(m - 1)$ conditions à vérifier, car la somme des périodes polaires est nécessairement nulle.

En résumé, nous venons d'étudier les intégrales

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{f(x, y)}},$$

où P et Q sont des polynômes en x et y, et nous savons reconnaître si, parmi les intégrales de cette forme, *il y en a de seconde espèce*.

7. Le problème que nous venons de traiter n'est qu'un cas particulier du problème général de la réduction des intégrales de seconde

espèce; prenons maintenant le cas général. Soit donc

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{M\sqrt{f(x, y)}}$$

(P, Q, M étant des polynômes en x et y) une intégrale quelconque de seconde espèce. Nous supposerons, comme il est permis, que dans f l'ensemble des termes homogènes du plus haut degré m n'est pas divisible par y.

Une première réduction, très facile, consiste à ramener, par soustraction d'une fonction algébrique, l'intégrale précédente à la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\chi(y)\sqrt{f(x, y)}},$$

$\chi(y)$ étant un polynôme en y. Réduisons donc, autant qu'il est possible, une intégrale de cette forme.

Soit $y = a$ une racine multiple d'ordre α de l'équation $\chi(y) = 0$: α sera plus grand que un, sinon l'intégrale serait de troisième espèce. La condition d'intégrabilité

$$\chi(y)\,P\left[\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x}\right] = 2f(x, y)\left[\chi(y)\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) - P\frac{\partial \chi}{\partial y}\right]$$

montre que $P(x, y)$ est divisible par $y - a$.

Pourrons-nous remplacer l'intégrale proposée par une intégrale de même forme, mais où, à la place de $\chi(y)$, nous aurons au dénominateur

$$\frac{\chi(y)}{y - a}.$$

Retranchons à cet effet de l'intégrale une expression de la forme

$$\frac{\lambda(x, y)\sqrt{f}}{(y - a)^{\alpha - 1}}.$$

Dans cette différence, le coefficient de dx sous le signe d'intégration sera divisible par $y - a$, puisque P est divisible par $y - a$; quant au

coefficient de dy, il sera divisible par $y - a$ si

$$Q(x, y) + (\alpha - 1)\lambda(x, y)f(x, y)$$

est divisible par $y - a$; il faut pour cela que

$$Q(x, a) + (\alpha - 1)\lambda(x, a)f(x, a) = 0;$$

donc $Q(x, a)$ doit être divisible par $f(x, a)$. Cette condition sera remplie si $y = a$ n'a que des points simples de rencontre avec la courbe

$$f(x, y) = 0.$$

La condition d'intégrabilité donne en effet, en remplaçant P par $(y - a)P_1$ et faisant $y = a$,

$$-Q(x, a)f_x(x, a) = 2f(x, a)\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} - \alpha P_1 \chi_1\right)_{y=a},$$

χ_1 étant un polynôme en y.

D'après l'hypothèse $f(x, a)$ et $f_x(x, a)$ n'auront pas de racine commune : donc $Q(x, a)$ sera divisible par $f(x, a)$.

Le polynôme λ pourra donc être déterminé, de manière à satisfaire à la condition indiquée. En continuant ainsi de proche en proche, on arrivera à une intégrale

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\chi_1(y)\sqrt{f(x, y)}}$$

ou

$$\chi_1(y) = \frac{\chi(y)}{(y - a)^\alpha}.$$

On pourra donc, en continuant, faire disparaître du dénominateur tous les facteurs $(y - a)^\alpha$ correspondant à une droite $y = a$, qui n'a que des points simples de rencontre avec la courbe $f(x, y) = 0$.

8. Envisageons donc l'intégrale

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\psi(y)\sqrt{f(x, y)}},$$

où $\psi(y)$ n'admet d'autres racines $a, b, \ldots, l$, à un degré d'ailleurs quelconque de multiplicité, que celles de l'équation $\varphi(y) = 0$ résultant de l'élimination de x entre

$$f(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

En raisonnant sur cette intégrale comme au n° **6**, nous la ramènerons par des soustractions de fonctions algébriques à la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dx}{\sqrt{f(x, y)}},$$

où

$$P = A_0 x^{m-2} + A_1 x^{m-3} + \ldots,$$
$$Q = B_0 x^{m-4} + \ldots,$$

les A et les B étant ici, non plus des polynômes, mais des fonctions rationnelles de y, dont le dénominateur ne peut s'annuler que pour a, $b, \ldots, l$.

Nous aurons donc à considérer, comme plus haut, le système d'équations différentielles en

$$A_0, \quad A_1, \quad \ldots, \quad B_0, \quad B_1, \quad \ldots$$

donné par la condition d'intégrabilité, et à rechercher si l'on peut satisfaire à ces équations en prenant pour les A et B des fonctions rationnelles de y, question qui ne présentera pas de difficulté, puisque les intégrales du système sont régulières dans le voisinage de tous les points critiques.

Supposons qu'il soit possible de satisfaire aux conditions précédentes. Il faut maintenant reconnaître si l'intégrale obtenue n'a pas de courbe logarithmique.

Une courbe logarithmique pourrait être donnée par les deux équations

$$y = a, \qquad z^2 = f(x, a);$$

cette courbe est d'ailleurs irréductible, car on peut supposer qu'on a

fait préalablement sur x et y une substitution linéaire; donc, pour $y = a$ (qui correspond à une racine multiple de l'équation en x), l'équation

$$f(x, y) = 0$$

aura des racines simples, outre la racine multiple. Il n'y aurait d'exception que dans le cas où f se composerait de droites passant par un même point, cas que l'on peut laisser de côté, car il est très facile de l'étudier directement.

Je dis que, *dans ces conditions d'irréductibilité de la courbe*

$$z^2 = f(x, a),$$

la période polaire est nécessairement nulle. Pour l'évaluer, nous avons à considérer l'intégrale

$$\int \frac{Q\,dy}{\sqrt{f(x, y)}}$$

en donnant à x une valeur fixe arbitraire. Cette période aura une expression de la forme

$$\frac{R(x, a)}{\sqrt{f(x, a)}},$$

R étant rationnel en x et a. Cette période doit être indépendante de x. Par conséquent

$$\frac{R(x, a)}{\sqrt{f(x, a)}} = A,$$

A étant une constante; par suite,

$$z = \frac{R(x, a)}{A};$$

mais z, fonction rationnelle de x, est en contradiction avec le fait que l'équation $z^2 = f(x, a)$ est irréductible.

Par suite, $y = a$ ne donne pas de courbe logarithmique.

Il ne reste plus qu'à considérer les m droites à l'infini; on les étudiera comme au n° **6**.

9. Examinons maintenant le cas d'une surface quelconque

$$f(x, y, z) = 0.$$

La réduction des intégrales de seconde espèce peut être faite encore ici par une méthode analogue. J'en ai précédemment indiqué le point de départ, mais sans approfondir la question. Soit

$$\int P\,dx + Q\,dy$$

une intégrale quelconque de seconde espèce relative à la surface f; l'intégrale

$$(2) \qquad \int P(x, y, z)\,dx,$$

où y est un moment considéré comme un paramètre arbitraire, est une intégrale de seconde espèce pour la relation algébrique entre x et z,

$$f(x, y, z) = 0.$$

En désignant par p le genre de cette courbe, et désignant par

$$\int \frac{Q_1(x, y, z)\,dx}{f'_z}, \qquad \ldots, \qquad \int \frac{Q_{2p}(x, y, z)\,dx}{f'_z}$$

$2p$ intégrales distinctes de seconde espèce, relatives à cette courbe, les Q étant des polynômes en x, y, z et de degré $2m - 4$ en x et z, on peut mettre l'intégrale (2) sous la forme

$$a_1 \int \frac{Q_1\,dx}{f'_z} + \ldots + a_{2p} \int \frac{Q_{2p}\,dx}{f'_z} + \lambda(x, y, z),$$

les a étant des fonctions rationnelles de y, et λ étant rationnel en x, y et z.

Si donc de (1) on retranche $\lambda(x, y, z)$, on aura une intégrale

$$\int R\,dx + S\,dy,$$

où

$$R = \frac{a_1 Q_1 + \ldots + a_{2p} Q_{2p}}{f'_z}.$$

Prenant donc pour R une expression de cette forme, les Q pouvant être considérés comme connus, j'ai cherché (*loc. cit.*) à déterminer les fonctions $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$ de y, de manière que les périodes de l'intégrale

$$\int \frac{a_1 Q_1 + \ldots + a_{2p} Q_{2p}}{f'_z} dx$$

ne dépendent pas de y.

Je trouve ainsi que les a doivent satisfaire à un certain système E d'équations différentielles linéaires, dont les coefficients sont des polynômes en y. On aura donc à rechercher les systèmes de valeurs de

$$a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$$

satisfaisant aux équations (E), et rationnelles en y.

Considérons un tel système s'il en existe; j'ai établi qu'on pourra alors associer à la fonction rationnelle R une fonction rationnelle $S(x, y, z)$, telle que

$$R\,dx + S\,dy$$

soit une différentielle totale exacte.

La fonction S n'est bien évidemment déterminée qu'à une fonction rationnelle près de y. Cette remarque, si simple, va être essentielle pour la suite.

Il s'agit, en effet, maintenant de savoir si l'intégrale

$$\int R\,dx + S\,dy$$

a ou non des courbes logarithmiques.

Les seules courbes logarithmiques à distance finie pourraient être données par

$$y = a, \qquad f(x, a, z) = 0,$$

en désignant par a un point singulier du système d'équations différen-

tielles E. La période s'obtiendrait en calculant pour l'intégrale

$$\int S\,dy,$$

où l'on donne à x une valeur arbitraire, la période polaire relative à $y = a$. Mais, puisque l'on peut ajouter à S un terme de la forme $\frac{A}{y-a}$, on peut supposer que cette période est nulle. Nous pouvons donc supposer que l'intégrale

$$\int R\,dx + S\,dy$$

n'a pas pour courbes logarithmiques les courbes $y = a$.

La seule courbe logarithmique que pourrait avoir l'intégrale précédente est donc *la courbe de la surface à l'infini*. Mais cette courbe peut ici être supposée irréductible; elle ne peut donc être une courbe logarithmique, puisque m fois le résidu correspondant doit être nul.

Nous arrivons donc au théorème suivant : *A chaque solution rationnelle du système* E *correspond une intégrale de différentielle totale qui n'a pas de courbe logarithmique et qui ne se réduit pas à une fonction rationnelle des coordonnées.*

10. Nous avons, dans ce qui précède, parlé d'une manière générale des intégrales de seconde espèce. Si l'on veut obtenir les intégrales de *première espèce*, la question est beaucoup plus facile, car l'intégrale a alors nécessairement la forme

$$\int \frac{B\,dx - A\,dy}{f_z} \qquad f(x, y, z) = 0 \quad \text{de degré } m,$$

où B et A sont des polynômes en x, y, z de degrés $m = 2$ en x, y, z, le premier étant seulement de degré $m - 3$ en x et z, le second de degré $m - 3$ en y et z. Mais je n'ai rien d'essentiel à ajouter aux considérations générales que j'ai développées dans mon premier Mémoire et aux remarques faites ultérieurement à ce sujet par M. Nöther. Nous pourrons donc dans la suite considérer les deux questions suivantes comme entièrement traitées :

1° Recherche des intégrales de première espèce d'une surface :

2° Recherche des intégrales de seconde espèce, non algébriques, c'est-à-dire formation des intégrales de seconde espèce linéairement indépendantes.

Ce dernier problème a précisément fait l'objet du Chapitre actuel. L'étude des intégrales de seconde espèce est cependant loin d'être épuisée, et nous aurons à revenir sur ce sujet dans le Chapitre suivant (Chapitre II, Section III).

III. — Intégrales de troisième espèce.

11. Nous avons déjà démontré qu'en général, dans une surface algébrique, *toutes les périodes se réduisaient aux périodes polaires*. La question à étudier consiste donc à rechercher dans quels cas il y aura des périodes autres que les périodes provenant des courbes logarithmiques; nous ne sommes pas encore en mesure de traiter cette question, que nous renvoyons au Chapitre suivant.

Pour le moment, nous allons nous borner à imiter ce que nous avons fait pour les intégrales de seconde espèce, en cherchant à faire autant qu'il est possible la réduction d'une intégrale de troisième espèce.

Nous nous limitons d'ailleurs aux équations de la forme

$$z^2 = f(x, y),$$

f étant un polynôme qu'une transformation homographique préalable permet de supposer de degré pair.

Soit donc l'intégrale

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{M\sqrt{f(x, y)}},$$

où nous avons

$$M = [A(x, y)]^\alpha [B(x, y)]^\beta \ldots [L(x, y)]^\gamma,$$

les facteurs A, B, ..., L étant irréductibles et premiers avec $f(x, y)$, P et Q étant des polynômes.

Nous aurons d'abord une suite de réductions faciles, qui nous ont

déjà servi dans le cas des intégrales de seconde espèce, et qui ramèneront l'intégrale à la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\chi(y)\,A.B\ldots L\sqrt{f(x,y)}},$$

les facteurs A, B, ..., L ne figurant plus qu'à la première puissance au dénominateur; dans le cas des intégrales de seconde espèce, ils disparaissaient dans ce dénominateur, où ne restait plus que le polynôme $\chi(y)$.

Le théorème que je veux établir est relatif à la courbe d'intersection des deux surfaces

$$A(x,y) = 0, \qquad z^2 = f(x,y).$$

Laissant y constant, considérons la période polaire de l'intégrale

$$\int \frac{P\,dx}{\chi(y)\,A,B\ldots L\sqrt{f(x,y)}}$$

relative à un point x, racine de $A(x,y)$; cette période sera

$$\frac{P(x,y)}{\chi\dfrac{\partial A}{\partial x}B\ldots L\sqrt{f(x,y)}}$$

et cette expression devra être indépendante de y [x étant toujours tiré de $A(x,y) = 0$, en fonction de y]; c'est donc une constante, soit l'unité : on aura, par suite,

$$P^2 - R^2 f(x,y) = 0,$$

R étant le polynôme $\chi\dfrac{\partial A}{\partial x}B\ldots L$, pour les valeurs de x et y satisfaisant à

$$A(x,y) = 0.$$

On en tire une conclusion intéressante : *La surface* $A = 0$ *coupe la*

surface proposée, suivant les deux courbes distinctes

$$A = 0, \qquad A = 0,$$
$$z = \frac{P}{R}, \qquad z = -\frac{P}{R}.$$

Ainsi ces polynômes A, B, ..., L *ne peuvent être pris arbitrairement.*

12. La condition nécessaire trouvée vient compliquer singulièrement la discussion complète des intégrales de troisième espèce. Elle peut conduire à des résultats assez singuliers au premier abord, comme celui que je vais indiquer.

Prenons le cas simple de

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{A(x, y)\sqrt{f(x, y)}},$$

la condition d'intégrabilité sera

$$(1) \quad A\left[P\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x}\right] = 2f(x, y)\left[A\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + Q\frac{\partial A}{\partial x} - P\frac{\partial A}{\partial y}\right].$$

On peut se donner arbitrairement $A(x, y)$; et l'on peut certainement satisfaire à cette équation en prenant pour P et Q des polynômes en x et y; il suffit de prendre ces polynômes d'un degré suffisamment élevé. Mais, si $A(x, y)$ ne remplit pas la condition nécessaire, qui vient d'être indiquée,

$$A(x, y) = 0$$

ne pourra pas donner une courbe logarithmique; il arrivera nécessairement que P et Q seront divisibles par A.

La question inverse se pose d'elle-même. Comment doit être choisi $A(x, y)$ pour que l'on puisse trouver des polynômes P et Q satisfaisant à l'équation (1), et qui ne soient pas divisibles par A.

Un cas simple serait celui où $A(x, y) = M^2 - N^2 f(x, y)$, car il est évident alors que l'expression $\log \frac{M - N\sqrt{f}}{M + N\sqrt{f}}$ répond à la question.

Pour le cas général, remarquons qu'on peut réduire l'intégrale

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\Lambda(x,y)\sqrt{f(x,y)}}$$

en abaissant le degré des numérateurs P et Q.

Soient k le degré de P et Q, et α le degré de $\Lambda(x,y)$.

Désignons par p et q l'ensemble des termes homogènes en x et y de degré k dans P et Q, et par $a(x,y)$ l'ensemble des termes homogènes de degré α dans Λ.

En prenant dans la condition d'intégrabilité l'ensemble des termes homogènes de plus haut degré, nous aurons évidemment

$$(2)\quad a\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial y} - q\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = 2\varphi(x,y)\left[a\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) + q\frac{\partial a}{\partial x} - p\frac{\partial a}{\partial y}\right],$$

$\varphi(x,y)$ désignant l'ensemble des termes homogènes de degré m dans φ; nous supposerons seulement que les m directions asymptotiques de $f(x,y) = 0$ sont distinctes, ce qu'on a pu réaliser à l'avance, par une transformation homographique de la surface $z^2 = f(x,y)$.

Cette équation (2) peut s'écrire

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}&\left\{-maq - 2x\left[a\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) + q\frac{\partial a}{\partial x} - p\frac{\partial a}{\partial y}\right]\right\} \\ &+ \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left\{map - 2y\left[a\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) + q\frac{\partial a}{\partial x} - p\frac{\partial a}{\partial y}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Or la condition d'intégrabilité (1) montre, puisque Λ et f sont premiers entre eux, que $Q\frac{\partial\Lambda}{\partial x} - P\frac{\partial\Lambda}{\partial y}$ est divisible par Λ : donc $q\frac{\partial a}{\partial x} - p\frac{\partial a}{\partial y}$ est divisible par a; par suite, on peut diviser par a l'identité précédente. On aura donc

$$(mp - y\mu)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (-mq - x\mu)\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0.$$

On peut, par suite, écrire

$$p = \mu y + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$q = -\mu x + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

μ et λ étant des polynômes homogènes en x et y, le premier de degré $k-1$ et le second de degré $k-m+1$; substituons ces valeurs de p et q dans l'équation (2).

On aura alors

$$\begin{aligned} &a\mu(m-2k-2+2\alpha) \\ &\quad = 2a\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+2\lambda\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial y}\right], \end{aligned}$$

qui permet d'exprimer μ en fonction de λ, si l'on n'a pas

$$m+2\alpha=2k+2.$$

En portant dans l'intégrale

$$\int\frac{p\,dx+q\,dy}{a(x,y)\sqrt{\varphi(x,y)}}$$

la valeur de μ, on voit que cette intégrale est égale à

$$\frac{2m+4\alpha}{2k+2-m-2\alpha}\,\frac{\lambda\sqrt{\varphi}}{a}.$$

Supposons d'abord que $a(x,y)$ n'ait que des facteurs simples, il faudra que λ soit divisible par a, car les seuls infinis de l'intégrale ne pourraient être que logarithmiques. Il s'ensuit que p et q étaient divisibles par a.

Cela posé, soit

$$\frac{\lambda}{a}=\lambda_1,$$

λ_1 étant un polynôme homogène en x et y.

De l'intégrale

$$\int\frac{P\,dx+Q\,dy}{A(x,y)\sqrt{f(x,y)}}$$

retranchons

$$\frac{2m+4\alpha}{2k+2m-2\alpha}\,\lambda_1\sqrt{f(x,y)},$$

la différence sera

$$\int \frac{P_1 dx + Q_1 dy}{A(x, y)\sqrt{f}},$$

P_1 et Q_1 étant seulement de degré $k - 1$. On a donc pu diminuer d'une unité le degré des polynômes qui figurent au numérateur; on continuera ainsi la réduction tant que l'on n'aura pas

$$2k = m + 2\alpha - 2,$$

circonstance qui se présentera, car nous pouvons supposer m pair (en ayant, comme il a été dit, effectué d'abord une transformation homographique sur x et y).

Nous remarquerons que, pour

$$k = m' + \alpha - 1,$$

on aura nécessairement dans les expressions de p et q

$$\lambda = 0;$$

car λ doit être divisible par a; or le degré de λ est égal à

$$k - 2m' + 1 = \alpha - m'.$$

λ ne peut donc être divisible par a, donc

$$\lambda = 0;$$

c'est cette propriété qui est la base de la forme invariante de l'intégrale pour $k = m' - \alpha + 1$, quand on fait sur x et y une transformation homographique.

On arrive donc à la conclusion suivante : *Dans l'intégrale*

$$\int \frac{P dx + Q dy}{A(x, y)\sqrt{f(x, y)}},$$

si α est le degré de A, *on peut supposer que le degré de* P *et* Q *est égal à*

$$m' + \alpha - 1, \qquad (m = 2m').$$

Cette proposition conduit à une conséquence intéressante : les surfaces

$$z^2 = f(x, y)$$

se classeront *d'après le degré minimum* α, que l'on peut donner à A pour avoir une intégrale de la forme précédente.

Il est manifeste que, si α est un tel nombre, P et Q seront premiers avec A, sinon α ne serait pas le degré minimum. De plus, il y aura toujours certainement un degré minimum, car α sera au plus égal à $2m'$, puisqu'on répondra aux conditions en prenant

$$A(x, y) = M^2 - f(x, y),$$

M étant un polynôme arbitraire de degré m'. On a en effet, dans ce cas,

$$\log \frac{M - \sqrt{f}}{M + \sqrt{f}},$$

qui répond à la question.

Le minimum α pourra donc être trouvé par une suite de tâtonnements.

15. Il a été supposé dans la réduction du paragraphe précédent que $a(x, y)$ n'avait que des facteurs simples. Il n'y a là aucune difficulté pour la généralité des remarques qui précèdent.

Reprenons, en effet, l'intégrale

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{A(x, y)\sqrt{f(x, y)}},$$

P et Q étant de degré k supérieur à $m' + \alpha - 1$. Effectuons sur x et y une substitution homographique quelconque :

$$x = \frac{a_1 x' + b_1 y' + c_1}{a x' + b y' + c}, \qquad y = \frac{a_2 x' + b_2 y' + c_2}{a x' + b y' + c},$$

et soient

$$f(x, y) = \frac{F(x', y')}{(a x' + b y' + c)^{2m'}},$$

$$A(x, y) = \frac{B(x', y')}{(a x' + b y' + c)^{\alpha}},$$

et l'on aura

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{A(x,y)\sqrt{f(x,y)}} = \int \frac{P_1\,dx' + Q_1\,dy'}{B(x',y')(ax'+by'+c)^{\lambda}\sqrt{F(x',y')}},$$

et dans $B(x',y')$ les directions asymptotiques seront distinctes. On réduira d'abord le facteur $(ax'+by'+c)^{\lambda}$, qui disparaîtra même complètement, car la surface

$$z^2 = F(x',y')$$

n'est pas coupée, suivant *deux* courbes distinctes, par

$$ax'+by'+c=0.$$

On ramène donc l'intégrale à

$$\int \frac{P_2\,dx' + Q_2\,dy'}{B(x',y')\sqrt{F(x',y')}},$$

P_2 et Q_2 étant de degré $m'+\alpha-1$. Il n'y a plus alors qu'à revenir aux variables x et y, et l'on a la réduction cherchée.

CHAPITRE II.

SUR LES CYCLES DANS LES SURFACES ALGÉBRIQUES.

I. — Sur la transformation des cycles d'une surface de Riemann dépendant d'un paramètre arbitraire.

1. Considérons l'équation

$$f(x,y,z)=0$$

(f étant un polynôme), comme représentant une certaine courbe ou

surface de Riemann entre x et z; la lettre y représente un paramètre. Quand y varie, la surface de Riemann se déforme.

Soit, pour y arbitraire, p le genre de la surface; nous pourrons tracer sur elle $2p$ cycles indépendants; c'est de la transformation de ces cycles, quand y varie, que nous allons nous occuper. Deux cycles seront considérés comme identiques, quand on pourra passer de l'un à l'autre par une déformation continue de la surface. Nous devons naturellement nous demander quel est le nombre des cycles distincts. Nous nous trouvons avoir répondu par avance à cette question pour le cas d'une relation algébrique arbitraire entre x, y et z; il résulte en effet aisément du théorème démontré dans le premier Chapitre que, si l'équation f est la plus générale de son degré, tout cycle se ramènera à un seul cycle.

Mais nous allons reprendre ce théorème fondamental, en présentant la démonstration de manière à pouvoir aborder ensuite l'étude des cas spéciaux qui forment le point capital de cette théorie. Soit

$$\text{(I)} \qquad \int \frac{F(x, y, z)\,dx}{f'_z}$$

une intégrale abélienne de seconde espèce relative à la courbe f, $F(x, y, z)$ désignant un polynôme en x, y, z.

Les périodes de l'intégrale (I) sont des fonctions de y, et nous avons déjà dit qu'elles satisfaisaient à une équation différentielle linéaire, dont les coefficients sont rationnels en y. Désignons par (E) cette équation; son ordre sera égal à $2p$ [on suppose que l'intégrale (I) est prise arbitrairement; car, pour certaines intégrales, il pourrait y avoir réduction dans l'ordre de E].

De plus, dans l'hypothèse où $f(x, y, z)$ est un polynôme général de son degré, cette équation sera *irréductible*, c'est-à-dire qu'aucune de ses intégrales ne satisfera à une équation linéaire d'ordre moindre et à coefficients rationnels en y.

Les points critiques de l'équation linéaire sont faciles à trouver; élimine-t-on z entre

$$f(x, y, z) = 0, \qquad f_z(x, y, z) = 0.$$

on aura une relation entre x et y,

$$P(x, y) = 0.$$

Les valeurs de y, pour lesquelles deux racines de la fonction x de y définie par l'équation précédente deviendront égales, feront connaître les points singuliers de l'équation (E).

L'équation (E) a toutes ses intégrales régulières; de plus, pour chaque point critique, les racines de l'équation fondamentale déterminante sont des racines de l'unité. Nous avons supposé que f était un polynôme arbitraire, mais nous n'allons avoir qu'à retenir une conséquence de ce fait, à savoir que l'équation E est irréductible, et nous allons montrer que, quand l'équation E est irréductible, *tous les cycles se ramèneront à un seul.*

Prenons en effet une valeur arbitraire de y et considérons les cycles donnant les $2p$ périodes de l'intégrale (I). Soit pris un de ces cycles, et ω_1 la période correspondante; en faisant décrire à y tous les chemins possibles, nous reviendrons au point de départ avec $2p$ déterminations linéairement indépendantes

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_{2p};$$

ces $2p$ valeurs sont $2p$ périodes distinctes de l'intégrale (I); de plus, Ω désignant la période correspondant à un cycle quelconque, on aura

$$m\Omega + m_1\omega_1 + \ldots + m_{2p}\omega_{2p} = 0,$$

les m étant des entiers, c'est-à-dire que Ω se ramène au cycle ω_1.

Cela posé, suivons pendant la variation de y, en même temps que la variation de la valeur de la période, la déformation continue du cycle correspondant; nous arriverons ainsi à $2p$ cycles, et inversement tous ces cycles se réduiront à l'un d'entre eux. Il est donc établi que, *dans le cas où l'équation* E *est irréductible, tous les cycles se réduisent à un seul.*

2. Les considérations précédentes indiquent la marche à suivre pour faire dans tous les cas l'étude de la transformation des cycles.

Reprenons l'équation (E) qui va jouer un rôle essentiel dans ce qui suit.

En partant pour une valeur arbitraire y_0 de y d'une période ω_1, et décrivant tous les chemins possibles, supposons qu'on n'obtienne seulement que q périodes distinctes

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_q,$$

et des combinaisons linéaires à coefficients commensurables de ces q périodes. Soit ω'_1 une période distincte des précédentes [et qui par suite ne peut être non plus une combinaison linéaire à coefficients constants de ces précédentes, car alors l'équation (E) serait d'ordre inférieur à $2p$], et supposons qu'on obtienne avec elle par différents chemins

$$\omega'_1, \quad \omega'_2, \quad \ldots, \quad \omega'_{q'},$$

et des combinaisons linéaires à coefficients commensurables de ces q périodes. Si nous n'avons pas encore épuisé les $2p$ périodes, on continuera de la même manière, et, en résumé, les périodes se trouveront partagées en un certain nombre de groupes distincts.

Le nombre de ces groupes sera le nombre des cycles distincts de la surface de Riemann f.

3. Cherchons à interpréter la distinction précédente en groupes de cycles. Tout d'abord les périodes arithmétiquement distinctes sont linéairement indépendantes, puisque nous supposons, comme il est permis, et comme nous l'avons dit plus haut, que l'ordre de l'équation est égal à $2p$. Les q périodes du premier groupe

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_q$$

satisferont à une équation linéaire d'ordre q à coefficients rationnels: *l'équation* (E) *sera réductible.*

Pareillement nous aurons pour les ω' une équation linéaire d'ordre q', et ainsi de suite; par conséquent, à chaque groupe de cycles correspond une équation linéaire irréductible.

Nous pouvons approfondir davantage cette réduction. On peut supposer que l'on part d'une période absolument arbitraire ω_1; on arrive

alors à une équation linéaire d'ordre q. Ce nombre q est caractéristique pour l'équation différentielle (E); en prenant ensuite pour ω_1 une période absolument arbitraire (sauf qu'elle est arithmétiquement distincte de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$), ce sera encore une équation de degré q que l'on obtiendra; donc tous les nombres

$$q, \quad q', \quad \ldots$$

sont égaux. Le nombre q est un diviseur de $2p$, et *le nombre des cycles distincts est égal à* $\frac{2p}{q}$.

D'après ce qui a été dit plus haut, q est en général égal à $2p$. Comment pourra-t-on toujours le déterminer?

On commencera par déterminer le groupe de l'équation linéaire (E). Soit

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_{2p}$$

un système de périodes normales (pour fixer les idées) de l'intégrale initiale.

Le groupe de l'équation est formé de substitutions linéaires, relatives à $u_1, u_2, \ldots, u_{2p}$ substitutions à coefficients entiers, et dont le déterminant est égal à l'unité. Prenant dans le plan des y un point arbitraire O (non singulier pour l'équation différentielle), et le joignant aux divers points singuliers $A_1, A_2, \ldots, A_N$ de l'équation différentielle, nous obtenons ainsi dans le plan des y un système de coupures. En suivant la transformation des périodes, nous pourrons déterminer la substitution linéaire relative à

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_{2p},$$

correspondant à chacune des coupures. Le calcul pourra être laborieux, mais ne présente pas de difficultés théoriques que l'on puisse regarder comme insurmontables. Il reviendra à l'étude des variations des racines de l'équation

$$P(x, y) = 0,$$

autour de leurs points critiques, et des cycles correspondants.

Soient donc supposées connues ces substitutions fondamentales de l'équation linéaire; elles sont à coefficients entiers.

Formons une combinaison linéaire

$$U_0 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_{2p} u_{2p},$$

les a étant des entiers quelconques.

Désignons par $U_1, U_2, \ldots, U_N$ les valeurs des U_0, quand on a effectué sur les u les N substitutions fondamentales du groupe de l'équation linéaire. Soit q un nombre inférieur à $2p$. Parmi les N expressions

$$U_0, \quad U_1, \quad \ldots, \quad U_N,$$

il n'y en a pas bien évidemment plus de $2p$ linéairement indépendantes, mais écrivons qu'il y en a seulement q; nous obtiendrons ainsi

$$2p - q,$$

équations de condition entre les coefficients des substitutions fondamentales.

Si toutes ces conditions sont satisfaites, quels que soient les entiers a, ce que l'on pourra vérifier puisque les substitutions fondamentales sont connues, on sera certain que U_0 satisfera à une équation linéaire d'ordre q.

Nous avons dit que q doit être un diviseur de $2p$; pour faire les vérifications précédentes, nous prendrons donc successivement pour q les différents diviseurs de $2p$. On commencera par $q = 1$, et le plus petit diviseur, pour lequel seront vérifiées les conditions, sera le nombre cherché.

L'équation linéaire primitivement considérée se trouve donc remplacée par un certain nombre d'équations linéaires d'ordre moindre. Nous désignerons d'une manière générale, dans la suite, ces équations sous le nom d'équations (E).

II. — Sur les cycles linéaires des surfaces algébriques.

4. La définition des cycles linéaires se généralise d'elle-même quand on passe d'une courbe à une surface algébrique. Approfondissons un peu cette notion des cycles d'une surface algébrique.

Étant donnée une relation algébrique

$$f(x, y, z) = 0$$

entre trois variables complexes x, y, z, *un cycle linéaire* de cette relation ou de cette surface algébrique se définira de la manière suivante. Un cycle linéaire sera une suite continue *fermée* à une dimension de valeurs (x, y, z); deux cycles sont à considérer comme identiques, quand on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue.

Si, dans l'équation $f(x, y, z) = 0$, on laisse y constant, les cycles de la courbe algébrique entre x et z sont des cycles pour notre surface, et réciproquement tout cycle de la surface peut, par une déformation continue, être regardé comme une somme de cycles correspondant à ces courbes. Soit en effet conçu un cycle quelconque, et posons

$$x = x' + ix'', \qquad y = y' + iy'';$$

nous pourrons d'abord, par une déformation continue, ramener le cycle à être contenu dans un espace

$$y'' = \text{const.};$$

puis alors, dans l'espace à trois dimensions (x', x'', y'), ramener le cycle dans un plan $y' = \text{const.}$ Ceci suppose seulement qu'il n'y ait pas de lignes de singularité correspondant à $y = \text{const.}$, ce qu'on peut toujours éviter par une transformation préalable de coordonnées.

3. Les cycles de la surface se partageront donc tout d'abord en un certain nombre u de cycles distincts comme ceux de la courbe $f(x, y, z) = 0$. Mais nous avons maintenant à considérer, parmi les cycles distincts de la courbe précédente, ceux qui sont susceptibles de devenir infiniment petits.

Considérons un point singulier b de l'équation (E), et soient $x = a$, $z = c$ les valeurs correspondantes de x et z. Quand y est voisin de b, un certain nombre de cycles de la courbe f peuvent devenir infiniment petits. Admettons, pour un moment, que nous ayons déterminé, parmi ces cycles, ceux qui, *relativement à la surface algébrique*, équivalent à un cycle *nul*, c'est-à-dire se ramènent à un cycle réduit à

un point quand (x, y, z) reste dans le voisinage de (a, b, c). Je désigne ces cycles par

$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \ldots, \quad \gamma_\alpha$$

et nous opérerons de même pour tous les points singuliers.

Ces cycles γ sont bien des cycles distincts pour la courbe algébrique f entre x et z, quand on donne à y une valeur fixe; mais, relativement à la surface algébrique $f(x, y, z) = 0$, ils ne doivent pas être considérés comme des cycles. Nous aurons donc à chercher combien, parmi l'ensemble des cycles γ, correspondant à tous les points singuliers, il y en a de distincts relativement à la courbe f se déformant avec y; si n' désigne ce nombre, *le nombre des cycles réellement distincts et différents de zéro de la surface* $f(x, y, z) = 0$ *sera*

$$n'' = n - n'.$$

La recherche du nombre n' se fera, sans difficulté *théorique* tout au moins, au moyen des équations linéaires (E); nous n'avons pas à nous arrêter sur ce point. Mais nous avons rencontré une question préalable, à savoir l'étude des cycles infiniment petits de la surface dans le voisinage d'un point (a, b, c), dont il nous faut parler maintenant.

Un cas très simple, et qui d'ailleurs se présentera toujours, est celui où (a, b, c) serait un point simple de la surface, pour lequel on aura, par conséquent,

$$f_c(a, b, c) = 0, \qquad f'_a(a, b, c) = 0, \qquad \text{mais} \quad f'_b(a, b, c) \neq 0.$$

Pour y voisin de b, on a deux points singuliers de la courbe $f(x, y, z) = 0$ qui tendent à se confondre en $x = a$. On a là un cycle infiniment petit pour cette courbe; pour la surface f ce cycle est un cycle γ, c'est-à-dire qu'il se ramène à un cycle point. La chose est évidente, puisque le point (a, b, c) est un point simple de la surface.

Passons à un cas plus complexe, et supposons que (a, b, c) soit un point multiple isolé de la surface. La question que nous voulons traiter serait évidemment résolue, si nous connaissions les cycles infiniment petits de la surface autour du point (a, b, c), cycles distincts et ne se réduisant pas à un cycle nul. Peut-être ce simple énoncé paraîtra-t-il

singulier; mais il ne faut pas perdre de vue que, dans la théorie actuelle, un cycle infiniment petit peut être bien différent d'un cycle se réduisant à un point. Supposons, par exemple, une surface ayant un point multiple d'ordre q, et soit, en faisant $a = b = c = 0$,

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

l'équation du cône des tangentes en ce point multiple. En écartant des circonstances exceptionnelles, tout cycle infiniment petit de la surface autour de l'origine se ramènera à la limite, si on le fait se rapprocher indéfiniment de ce point, à un cycle relatif à la *courbe* algébrique, représentée en coordonnées homogènes par l'équation

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

Le nombre des cycles infiniment petits distincts sera donc ici égal à $2p$, en désignant par p le genre de cette courbe.

Dans tous les cas, on peut employer des considérations analogues; car nous n'avons qu'à faire usage de considérations analogues à celles qu'emploie M. Nœther quand il veut étudier une intégrale de première espèce dans le voisinage d'un point singulier (*Math. Annalen*, t. XXIX, p. 362). A un tel point le savant auteur fait dans tous les cas correspondre une certaine courbe S, et le genre de cette courbe nous donnera le nombre des cycles infiniment petits distincts ne se réduisant pas à un point. Si la surface a des lignes multiples [que nous pouvons, par une transformation préalable, supposer des lignes multiples ordinaires (*gewohnliche*)], nous aurons à examiner le cas où (a, b, c) est sur une ligne multiple. Cet examen est facile, car, par un simple changement préalable d'axes de coordonnées, on peut admettre que le point (a, b, c) à étudier est un point pour lequel les plans tangents aux différentes nappes de la surface sont distincts, et nous sommes ramenés alors au cas du point simple [1].

---

[1] Théoriquement, toute cette discussion se trouve, pour ainsi dire, supprimée, si l'on s'appuie sur la remarque faite par M. Nœther, que toute surface correspond point par point à une surface n'ayant que des lignes doubles avec des points triples à tangentes distinctes.

6. Qu'arrive-t-il, d'après ce qui précède, quand la surface est la plus générale de son degré. On a vu que dans ce cas les cycles de la courbe f entre x et z se réduisent à un seul; on peut d'ailleurs supposer que ce cycle est un cycle infiniment petit dans le voisinage d'un point simple, c'est-à-dire un cycle nul. *Donc, dans ce cas, il n'y a pas de cycle linéaire effectif pour la surface.*

Il n'est pas difficile d'indiquer des surfaces particulières, pour lesquelles le nombre des cycles distincts ne sera pas nul. Ainsi, si une surface a une intégrale de première espèce, il est manifeste que le nombre de ces cycles est au moins égal à deux.

Prenons, en particulier, une surface dont les coordonnées s'expriment par des fonctions uniformes quadruplement périodiques de deux paramètres u et v, de telle manière qu'à un point arbitraire de la surface ne corresponde qu'un seul système de valeurs de u et v, abstraction faite de multiples des périodes. Une telle surface aura évidemment *quatre* cycles distincts.

Soit encore une surface de la nature de celles qui ont été étudiées au premier Chapitre, c'est-à-dire pour lesquelles on a

$$x = R(\alpha, \beta, \alpha', \beta'), \qquad y = R_1(\alpha, \beta, \alpha', \beta'), \qquad z = R_2(\alpha, \beta, \alpha', \beta'),$$

les R étant rationnelles en α, β et (α', β') avec $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, $\psi(\alpha', \beta') = 0$, et telles qu'à un point (x, y, z) corresponde un seul système de valeurs de (α, β) et (α', β'). Si la courbe φ est de genre p, la courbe ψ de genre p', le nombre des cycles linéaires distincts de la surface sera égal à $2p + 2p'$.

7. Cette notion du nombre des cycles distincts se ramène à une question de Géométrie de situation (*analysis situs*, comme disait Riemann); c'est ce qu'il est aisé de montrer et de diverses manières.

Mais auparavant il est indispensable de rappeler rapidement la définition des divers ordres de connexité dans la Géométrie à n dimensions.

Nous considérons un continuum *fermé* δ à n dimensions, par exemple, pour fixer les idées, une *surface fermée* à n dimensions dans un espace à $n + 1$ dimensions.

Un ou plusieurs espaces *fermés* à m dimensions constitueront le

contour d'un espace à $(m+1)$ dimensions, contenu dans δ, quand, par ces espaces à m dimensions, on pourra faire passer un espace *fermé* à $(m+1)$ dimensions, dont ils limiteront une partie. Ceci posé, si l'on peut imaginer dans δ un nombre p_m d'espaces fermés à m dimensions, qui ne puissent pas constituer le contour d'un espace fermé à $m+1$ dimensions contenu dans δ, mais tels que tout autre espace fermé à m dimensions puisse constituer avec une partie d'entre eux ou avec tous le contour d'un espace fermé à $(m+1)$ dimensions contenu dans δ, *on dit que le domaine δ a une connexion de $m^{\text{ième}}$ espèce p_m+1.*

Pour un domaine fermé δ, les différents nombres p_m, pour les diverses valeurs de m, s'associent deux à deux, et l'on démontre que

$$p_m = p_{n-m}.$$

Si donc il s'agit, comme dans ce qui suit, d'un espace fermé à quatre dimensions, on aura à considérer les deux nombres p_1 et p_2 correspondant aux connexités de première et de seconde espèce.

Ces notions générales rappelées, revenons à l'équation

$$f(x, y, z) = 0.$$

Posons

$$x = \varphi(u, v),$$
$$y = \psi(u, v);$$

φ et ψ étant, par exemple, des fonctions hyperfuchsiennes de u et v, ayant un certain polyèdre fondamental, et telles qu'à une valeur arbitraire de x et y ne corresponde dans ce polyèdre qu'un seul système de valeurs de u et v.

La fonction z ne sera pas une fonction uniforme de u et de v; elle aura m valeurs pour chaque valeur de u et v. Mais nous pouvons imaginer que le polyèdre se recouvre lui-même m fois, de telle sorte que nous aurons un nouveau domaine, que je désigne par D, et tel qu'à chaque point de ce domaine ne corresponde qu'un système (x, y, z). Ce domaine D peut encore être considéré comme un certain *polyèdre;* il est limité par des *faces* qui se correspondent deux à deux, et sur deux faces correspondantes les points se correspondent deux à deux. En considérant alors comme confondus les points homologues de deux

faces correspondantes, *on peut envisager le polyèdre* D *comme un domaine fermé* et lui appliquer les notions précédentes relatives à la connexité. Nous aurons donc les deux membres p_1 et p_2 relatifs à D et c'est le premier qui nous intéresse en ce moment.

Reprenons maintenant les n'' cycles distincts étudiés au paragraphe précédent; à chacun de ces cycles correspondra dans D, envisagé comme un domaine fermé, une courbe fermée, et par ces courbes fermées on ne pourra pas faire passer un espace fermé à deux dimensions dont elles limiteront une partie; car, s'il en était ainsi, ces courbes fermées et, par suite, les cycles se ramèneraient à un moindre nombre, c'est-à-dire qu'ils ne seraient pas distincts. Réciproquement, considérons une autre courbe fermée Γ quelconque dans le domaine D; elle pourra être considérée comme limitant, avec les courbes fermées précédentes, une portion d'un espace fermé à deux dimensions. En effet, à la courbe Γ correspond un certain cycle Γ' que l'on peut ramener par une déformation à l'espace à deux dimensions $y = \text{const.}$, sur laquelle sont tracés les n'' cycles distincts; mais Γ' limite avec les n'' cycles ou une partie d'entre eux une certaine portion de surface; en remontant au domaine D, notre assertion est donc justifiée.

Il en résulte que le nombre des cycles distincts est égal au nombre p_1 *relatif au domaine* D.

Ainsi se trouve rattachée à une notion de géométrie de situation cette question du nombre des cycles distincts.

Notre attention se trouve en même temps portée sur le second nombre p_2, relatif à la connexité de deuxième espèce : nous y reviendrons dans un autre paragraphe.

8. La manière dont nous avons fait correspondre la surface

$$f(x, y, z) = 0$$

à un certain espace fermé à quatre dimensions n'est bien évidemment pas la seule façon de procéder. On peut, par exemple, opérer encore comme il suit. La relation

$$f(x, y, z) = 0$$

revient à deux relations entre six quantités réelles, ou à une seule rela-

tion algébrique entre cinq quantités réelles. On peut sur ces cinq quantités opérer une transformation rationnelle réversible, de telle sorte que, $x_1, x_2, \ldots, x_3$ désignant les cinq nouvelles variables, celles-ci restent toujours finies, et que, par suite, la relation algébrique correspondante

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_3) = 0$$

représente, dans un espace à cinq dimensions, une surface *fermée* à quatre dimensions.

Ces représentations sont excellentes pour fixer nos conceptions; mais, au point de vue pratique, nous sommes sur un terrain plus solide quand nous rattachons cette théorie, comme nous l'avons essayé, à une question de réductibilité d'une équation différentielle linéaire.

III. — Propositions générales sur les intégrales de seconde et troisième espèce.

9. Nous allons pouvoir compléter maintenant notre étude sur les intégrales de seconde et de troisième espèce. La surface de Riemann entre x et z

$$f(x, y, z) = 0$$

a joué un rôle important dans la discussion de ces intégrales. A l'aide des notions que nous venons d'acquérir sur la transformation des cycles de cette surface, cherchons à nous rendre compte à quelles conditions une surface algébrique peut avoir une intégrale de seconde espèce. Reprenons, à cet effet, la marche suivie dans le premier Chapitre. On part de $2p$ intégrales de seconde espèce de la courbe entre x et z, $f = 0$. Soient

$$\int \frac{F_1(x, y, z)\,dx}{f'_z}, \quad \int \frac{F_2(x, y, z)\,dx}{f'_z}, \quad \ldots, \quad \int \frac{F_{2p}(x, y, z)\,dx}{f'_z};$$

nous avons cherché si l'on pouvait déterminer $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$ rationnellement en y, de telle sorte que les périodes de

$$a_1 \int \frac{F_1\,dx}{f'_z} + a_2 \int \frac{F_2\,dx}{f'_z} + \ldots + a_{2p} \int \frac{F_{2p}\,dx}{f'_z}$$

ne dépendissent pas de y. Or les périodes se partagent en q catégories; prenons l'une de ces catégories, et soient

$$(1) \qquad \omega_1^1, \quad \omega_1^2, \quad \ldots, \quad \omega_1^q$$

q déterminations, correspondant à la même valeur de y, et linéairement indépendantes de la période ω_1^1; pareillement

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{llll} \omega_2^1, & \omega_2^2, & \ldots, & \omega_2^q, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \omega_{2p}^1, & \omega_{2p}^2, & \ldots, & \omega_{2p}^q \end{array}\right.$$

pour les autres intégrales. On aura

$$(\mathrm{E}) \qquad \left\{\begin{array}{l} a_1\omega_1^1 + a_2\omega_2^1 + \ldots + a_{2p}\omega_{2p}^1 = \alpha, \\ a_1\omega_1^2 + a_2\omega_2^2 + \ldots + a_{2p}\omega_{2p}^2 = \alpha, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_1\omega_1^q + a_2\omega_2^q + \ldots + a_{2p}\omega_{2p}^q = \alpha, \end{array}\right.$$

α étant une constante. Faisons décrire maintenant à y un chemin arbitraire, revenant au point de départ: on aura pour la suite (1) et chacune des suites (2) une même transformation linéaire, soit

$$m_1\omega_1^1 + m_2\omega_1^2 + \ldots + m_q\omega_1^q, \quad n_1\omega_1^1 + n_2\omega_1^2 + \ldots + n_q\omega_1^q, \quad \ldots$$
$$t_1\omega_1^1 + t_2\omega_1^2 + \ldots + t_q\omega_1^q.$$

Donc les relations (E) deviendront

$$\begin{array}{l} \alpha(m_1 + m_2 + \ldots + m_q) = \alpha, \\ \alpha(n_1 + n_2 + \ldots + n_q) = \alpha, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha(t_1 + t_2 + \ldots + t_q) = \alpha. \end{array}$$

Si donc la période α n'est pas nulle, on aura

$$(\mathrm{C}) \qquad \left\{\begin{array}{l} m_1 + m_2 + \ldots + m_q = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_1 + t_2 + \ldots + t_q = 1. \end{array}\right.$$

Toutes les substitutions du groupe devront donc satisfaire à ces relations.

Ainsi nous trouvons une série de nouvelles conditions relativement aux groupes de chacune des équations linéaires que vérifient les périodes. Si d'ailleurs ces groupes satisfont tous à ces conditions, on voit que les $\frac{2p}{q}$ équations analogues à (E), en mettant dans les seconds membres, pour chaque système, une constante arbitraire, nous donneront pour

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{2p}$$

des fonctions ayant une seule détermination, et, par suite, puisqu'il n'y a dans toute cette question que des équations linéaires à intégrales régulières, les a seront des fonctions rationnelles de y. Nous faisons donc ainsi, sous une autre forme, la recherche des conditions pour que les a puissent être déterminées en fonctions rationnelles de y, et nous voyons que le nombre des constantes arbitraires figurant dans ces fractions rationnelles sera égal au nombre des cycles distincts, pour lesquels le groupe correspondant satisfera aux conditions indiquées par les équations (C).

Ce nombre représentera en même temps le nombre des périodes des intégrales correspondantes; or il a été vu que ces intégrales sont de seconde espèce. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Le nombre des intégrales distinctes de seconde espèce est égal au nombre de leurs périodes.

On se rappelle ce que nous avons dit précédemment sur ce qu'on doit entendre par intégrales distinctes de seconde espèce : ce sont des intégrales dont aucune combinaison linéaire ne se réduit à zéro ou à une fonction rationnelle de x, y et z.

9. Nous pouvons maintenant compléter ce que nous avons à dire sur les intégrales de troisième espèce. Nous avons établi qu'en général ces intégrales n'avaient d'autres périodes que les périodes polaires ; le problème qui se présente naturellement est donc le suivant : rechercher s'il y a des intégrales de troisième espèce possédant des périodes autres que les périodes polaires.

Supposons donc qu'il y ait une intégrale de troisième espèce,

$$\int P dx + Q dy,$$

possédant un certain nombre de périodes autres que les périodes polaires. Considérons l'intégrale

$$\text{(I)} \qquad \int P dx$$

relative à

$$f(x, y, z) = 0,$$

où, comme dans tout ce qui a précédé, y figure comme paramètre. Cette intégrale possède un certain nombre de périodes polaires et cycliques. J'envisage les périodes cycliques; en faisant varier y, les cycles se déformeront, pouvant d'ailleurs traverser des points singuliers logarithmiques, qui donneront des périodes polaires. Supposons, comme plus haut, que le cycle considéré corresponde à une certaine équation linéaire (E) de notre théorie générale, et soient encore

$$\omega_1^1, \quad \omega_1^2, \quad \ldots, \quad \omega_1^q$$

les q cycles fondamentaux correspondant à cette équation linéaire. En désignant par les mêmes lettres les valeurs de l'intégrale (I) le long de ces cycles, nous aurons évidemment

$$\begin{aligned} \omega_1^1 &= \alpha, \\ \omega_1^2 &= \alpha, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \omega_1^q &= \alpha, \end{aligned}$$

α désignant une certaine constante, puisque ces périodes ne dépendent pas de y. Faisons maintenant décrire à y un chemin arbitraire revenant au point de départ, les cycles se sont transformés; mais ici les premiers membres ne se transforment pas seulement, comme dans le

cas des intégrales de seconde espèce, en

$$\begin{aligned}
&m_1\omega_1^1 + m_2\omega_1^2 + \ldots + m_q\omega_1^q,\\
&n_1\ \omega_1^1 + n_2\ \omega_1^2 + \ldots + n_q\ \omega_1^q,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&l_1\ \omega_1^1 + l_2\ \omega_1^2 + \ldots + l_q\ \omega_1^q;
\end{aligned}$$

car il peut s'ajouter des périodes polaires provenant des pôles de P qui ont pu être traversés par les cycles pendant leur déformation.

Nous aurons donc, en désignant par Π les périodes polaires, et par λ, μ, τ, ... des entiers,

$$\begin{aligned}
&(m_1 + m_2 + \ldots + m_q)\,\alpha + \Sigma\lambda\Pi = \alpha,\\
&(n_1 + n_2 + \ldots + n_q)\,\alpha + \Sigma\mu\Pi = \alpha,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&(l_1 + l_2 + \ldots + l_q)\,\alpha + \Sigma\tau\Pi = \alpha.
\end{aligned}$$

Mais nous supposons que α est une période distincte des périodes polaires Π; par conséquent, il faudra que

$$\begin{aligned}
&m_1 + m_2 + \ldots + m_q = 1,\\
&n_1 + n_2 + \ldots + n_q = 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&l_1 + l_2 + \ldots + l_q = 1.
\end{aligned}$$

Nous allons déduire de là un résultat intéressant.

Si les substitutions correspondant à la transformation des cycles se rattachant à une même équation linéaire (E) ne satisfont pas aux relations précédentes, la période cyclique donnée par ces cycles se réduit à des périodes polaires (ou elle est nulle, ce qui revient au même). Les équations (E) pour lesquelles ces relations sont vérifiées peuvent donc seules donner des périodes cycliques qui soient distinctes des périodes polaires; mais il existe alors des intégrales de seconde espèce, puisque les relations dont nous parlons expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des intégrales de seconde espèce, et le

nombre des périodes de notre intégrale de troisième espèce, distinctes des périodes polaires, sera précisément égal au nombre des intégrales distinctes de seconde espèce.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Il n'y a d'intégrales de troisième espèce avec des périodes autres que les périodes polaires que dans le cas où il y a des intégrales de seconde espèce, et alors le nombre des périodes autres que les périodes polaires pour une intégrale arbitraire de troisième espèce est égal au nombre des intégrales distinctes de seconde espèce.

Ainsi se trouve rattachée, par cette proposition, la théorie des intégrales de troisième espèce à celle des intégrales de seconde espèce.

10. Nous avons jusqu'ici toujours entendu par intégrales de seconde espèce ces intégrales telles qu'elles ont été définies au début du premier Chapitre de ce Mémoire. On a supposé dans cette définition que l'intégrale ne devenait pas infinie en certains points *isolés;* il y a là une lacune qu'il est nécessaire de combler.

Il est bien évident d'abord qu'une intégrale de différentielle totale ne peut pas devenir infinie, en un point *simple* de la surface, qui ne soit pas sur une de ces courbes que nous avons appelées *logarithmiques.*

Une intégrale pourrait-elle devenir infinie en certains points isolés d'une courbe multiple de la surface, tout en restant finie pour tout autre point de Σ, et en supposant de plus, bien entendu, que ces points isolés ne se trouvent pas à l'intersection de la courbe Σ et d'une courbe logarithmique? Il est aisé de voir que la chose est impossible, en se reportant à un théorème que j'ai donné dans le cas particulier des courbes doubles et qui a été démontré dans toute sa généralité par M. Nœther (Mémoire déjà cité sur les différentielles totales, *Math. Annalen,* t. XXIX, p. 363). L'intégrale étant mise sous la forme

$$\int \frac{A\,dy - B\,dx}{N.F_z}, \qquad F(x, y, z) = 0,$$

restera finie le long d'une courbe Σ de F (quand N ne s'annule pas),

si les polynômes B et A sont des polynômes *adjoints* à F (*adjungirt*) le long de Σ. Or ici, puisque l'intégrale reste, par hypothèse, finie pour tout point de Σ, à l'exception des points isolés supposés, A et B sont nécessairement des polynômes *adjoints* à F le long de Σ; l'intégrale restera donc finie pour tout point de Σ qui n'est pas sur une courbe logarithmique.

Nous n'avons donc à nous préoccuper que des points *multiples isolés* de la surface. Deux cas, *a priori*, peuvent se présenter. En un tel point A l'intégrale peut devenir infinie, quand (x, y, z) se rapproche de A dans une direction arbitraire, ou bien elle ne deviendra infinie que pour certaines directions spéciales.

Examinons d'abord le premier cas. Nous transformerons la surface par une transformation rationnelle admettant A comme point fondamental; à ce point correspondra dans la surface transformée une certaine courbe multiple le long de laquelle l'intégrale sera infinie. Nous nous trouvons alors ramené au cas envisagé dans notre définition primitive, qui se trouve ainsi complétée.

Passons à la seconde hypothèse. Nous emploierons la même transformation rationnelle, et nous aurons une courbe multiple, en certains points seulement de laquelle l'intégrale transformée deviendra infinie. Ceci, nous venons de le voir, est impossible, à moins qu'une courbe logarithmique ne rencontre la ligne multiple, et il y aura, par suite, des courbes logarithmiques passant par le point multiple isolé A. Pour chacune de ces courbes logarithmiques, la période polaire correspondante devra être nulle, si l'intégrale envisagée est de seconde espèce.

La définition des intégrales de seconde espèce se trouve ainsi complétée. Mais une question se présente maintenant tout de suite. Les théorèmes établis aux paragraphes précédents subsistent-ils sans modifications? La réponse est affirmative.

Prenons, par exemple, celui qui concerne les intégrales de seconde espèce. Nous avons trouvé une intégrale renfermant un certain nombre de constantes arbitraires α, ces constantes représentant précisément les périodes de l'intégrale.

S'il y a un point multiple isolé, il pourrait amener, après la transformation, certaines périodes polaires. Les périodes de l'intégrale

transformée sont toujours les quantités α; une période provenant d'une courbe logarithmique sera une somme de multiples des α. Par suite, les relations supplémentaires, qui doivent exprimer que notre intégrale est de seconde espèce, sont de la forme

$$\Sigma m\alpha = 0,$$

les m étant des entiers. Le nombre des constantes arbitraires se trouve donc diminué absolument de la même manière que le nombre des périodes (les m étant des entiers). Le théorème subsiste donc complètement.

Sur les cycles à deux dimensions dans les surfaces algébriques.

11. Nous avons dans la deuxième Section de ce Chapitre considéré un certain domaine D auquel nous avons fait correspondre uniformément les points de la surface. Ce domaine D est un domaine fermé, et nous avons étudié avec quelques détails le nombre p_1 relatif à la connexité du premier ordre, et démontré notamment ce résultat, au premier abord singulier, que le nombre p_1 est en général égal à zéro. Que pouvons-nous dire du nombre p_2 relatif à la connexité du second ordre? Quoique nous n'ayons pas fait l'étude bien complète de cette question difficile, les considérations qui vont suivre permettront tout au moins d'entrer quelque peu dans le sujet.

Les domaines fermés à deux dimensions, contenus dans D et servant à la définition de p_2 (en supposant que p_2 ne soit pas nul), nous conduisent à la notion des *surfaces cycliques* ou *cycles à deux dimensions* d'une surface algébrique. Une surface cyclique peut être définie un continuum fermé à deux dimensions, tel que toute courbe fermée à une dimension tracée sur lui soit un cycle linéaire de la surface.

Nous pouvons concevoir de la manière suivante la génération d'une surface cyclique. Soit sur cette surface un cycle linéaire correspondant à une certaine valeur constante de y ($y = y_0$); faisons maintenant varier y de telle façon qu'à cette suite continue de valeurs de y corresponde une succession continue de cycles linéaires sur la surface cyclique. Revenons enfin au point de départ y_0, après avoir ainsi

décrit toute la surface cyclique avec le cycle linéaire mobile; quand y reviendra en y_0, nous reviendrons au cycle linéaire primitif. On voit sous cette forme que la question des cycles à deux dimensions est intimement liée à celle de la transformation des cycles linéaires en eux-mêmes.

Or nous avons étudié la transformation des cycles de la relation entre x et z

$$f(x, y, z) = 0,$$

quand on fait varier y à l'aide d'une certaine équation différentielle linéaire E; nous allons encore avoir à en faire usage.

Soient de nouveau l'intégrale de seconde espèce

$$\int \frac{Q(y, x, z)\,dx}{f'_z},$$

déjà plusieurs fois considérée, et l'équation (E) correspondante.

Désignons par $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p}$ un système de périodes normales, et soient

$$\begin{array}{l} m_1^1\omega_1 + m_1^2\omega_2 + \ldots + m_1^{2p}\omega_{2p}, \\ m_2^1\omega_1 + m_2^2\omega_2 + \ldots + m_2^{2p}\omega_{2p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_{2p}^1\omega_1 + m_{2p}^2\omega_2 + \ldots + m_{2p}^{2p}\omega_{2p}, \end{array}$$

les m étant des entiers, une substitution quelconque du groupe de l'équation (E). Si l'équation caractéristique de la substitution admet pour racine l'unité, c'est-à-dire si

$$\begin{vmatrix} m_1^1 - 1 & m_1^2 & \ldots & m_1^{2p} \\ m_2^1 & m_2^2 - 1 & \ldots & m_2^{2p} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ m_{2p}^1 & m_{2p}^2 & \ldots & m_{2p}^{2p} - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

il y aura une certaine combinaison linéaire à coefficients entiers,

$$\Omega = M_1\omega_1 + M_2\omega_2 + \ldots + M_{2p}\omega_{2p},$$

c'est-à-dire une certaine période que la substitution considérée ne transformera pas. A cette période correspond un cycle linéaire et à la substitution linéaire un déplacement du cycle correspondant à la variation de y qui donne la substitution; de cette manière se trouve engendrée une surface cyclique.

12. La première question qui se présente est de savoir s'il y a en général des cycles effectifs à deux dimensions, c'est-à-dire si le nombre p_2 a en général une valeur différente de zéro. Nous allons montrer que ce nombre p_2 existe en général, et que *c'est par suite dans les cycles à deux dimensions d'une surface qu'il faut chercher la généralisation des cycles d'une courbe algébrique.*

Il sera utile pour notre objet, et en même temps intéressant en soi, de considérer simultanément, avec les surfaces cycliques, les intégrales doubles de première espèce

$$(1) \qquad \int\int \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}$$

attachées à la surface. Comme on le sait, $Q(x, y, z)$ est un polynôme adjoint d'ordre $m - 4$ de la surface f de degré m.

Reportons-nous, d'autre part, au Mémoire fondamental de M. Poincaré (*Acta mathematica*, 9), où se trouve développée la notion capitale d'intégrale double *étendue à un contour fermé à deux dimensions*, et démontré ce théorème essentiel, analogue au théorème de Cauchy, que cette intégrale double ne varie pas quand on déforme le contour fermé, sans traverser de singularité de l'élément de l'intégrale.

Considérons donc une surface cyclique et la valeur de l'intégrale (1) prise sur cette surface cyclique; existera-t-il certainement des surfaces cycliques pour lesquelles la valeur de cette intégrale sera différente de zéro?

La surface cyclique étant supposée engendrée comme il a été dit au paragraphe précédent, la valeur de l'intégrale sera

$$\int \Omega\, dy,$$

Ω étant la période qui reprend la même valeur quand y décrit un chemin fermé convenable, et l'intégrale précédente étant prise le long de ce chemin. On peut remarquer de suite que, si le chemin décrit par y ne comprend à son intérieur qu'un seul point singulier de l'équation linéaire (E), l'intégrale sera nulle; en effet, Ω sera dans ce cas uniforme dans les environs de ce point singulier; celui-ci ne pourra être un pôle pour Ω, car alors l'intégrale double ne serait pas de première espèce, et alors, Ω étant holomorphe à l'intérieur du contour d'intégration, l'intégrale sera nulle.

Nous voulons montrer que, la surface f étant une surface arbitraire de degré m, il y a des intégrales du type précédent qui ne sont pas nulles.

Tout d'abord la chose se voit de suite pour certaines surfaces particulières. Prenons, par exemple, la surface

$$z^2 = (x - a_1)\ldots(x - a_\alpha)(y - b_1)\ldots(y - b_\beta);$$

on a l'intégrale double de première espèce

$$\int\int \frac{dx\,dy}{z},$$

et, en désignant par ω une période de l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x - a_1)\ldots(x - a_\alpha)}},$$

par ω' une période de

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(y - b_1)\ldots(y - b_\beta)}},$$

$\omega\omega'$ représentera manifestement une période différente de zéro de l'intégrale double.

Cela posé, effectuons une transformation homographique quelconque sur la surface précédente pour que les axes n'aient plus une position spéciale par rapport à la surface; soit alors

$$f(x, y, z) = 0$$

son équation : elle sera de degré $m = \alpha + \beta$ et n'aura pas de lignes multiples.

Concevons alors l'équation linéaire, que nous désignons par E, relative aux cycles de la relation algébrique entre x et z, $f = 0$. Parmi les contours fermés dans le plan de la variable y, ramenant le même cycle et engendrant par suite une surface cyclique, il y en aura certainement pour lesquels l'intégrale

$$\int \Omega\, dy$$

ne sera pas nulle.

Prenons maintenant une surface arbitraire de degré m,

$$F(x, y, z) = 0,$$

et concevons l'équation linéaire (en y) correspondante (E'). Le groupe de l'équation E est un sous-groupe dans le groupe de l'équation E', car on peut passer de l'équation E' à l'équation (E) en faisant varier certains coefficients d'une manière continue, et les points singuliers de l'équation (E) sont les limites des points singuliers de l'équation E', plusieurs de ceux-ci pouvant être confondus en un seul. D'autre part, on peut envisager une intégrale double de première espèce de la surface F, qui se transformera, par la variation continue des mêmes coefficients, en une intégrale double de première espèce de la surface f. A une certaine substitution linéaire du groupe de (E) correspond une intégrale Ω de cette équation, que la substitution laisse invariable; pareillement pour l'équation (E) on aura une intégrale Ω' jouissant de la même propriété, et puisque

$$\int \Omega\, dy$$

n'est pas nulle, il en sera nécessairement de même pour l'expression

$$\int \Omega'\, dy,$$

dont la précédente n'est qu'une valeur particulière pour des valeurs spéciales de certains coefficients ou paramètres.

On peut, au premier abord, se demander comment il se fait qu'un raisonnement du même genre ne soit pas applicable aux cycles linéaires; d'où l'on conclurait qu'il existe en général des cycles linéaires effectifs, proposition complètement fausse, comme nous l'avons vu précédemment. La raison en est facile à saisir : c'est la présence des singularités de la surface qui amène la réductibilité d'une équation différentielle linéaire en général irréductible. Pour les cycles à deux dimensions, au contraire, la présence des singularités ne peut que diminuer le nombre des substitutions susceptibles de correspondre à un tel cycle.

15. Je me bornerai à introduire ainsi cette notion des cycles à *deux* dimensions d'une surface algébrique. Quant à la recherche précise du nombre de ces cycles, c'est une question que je n'ai pas encore entièrement élucidée; je la laisserai de côté, en me réservant d'y revenir.

Indiquons seulement comment on pourrait encore procéder pour obtenir des *surfaces cycliques*. Soient

$$x = x' + ix'', \qquad y = y' + iy'', \qquad z = z' + iz''.$$

Concevons que l'on prenne pour x', x'', y', y'', z', z'' des fonctions rationnelles réelles de quatre variables réelles u_1, u_2, u_3 et u_4, ne devenant infinies pour aucune valeur réelle de ces variables. En substituant dans $f(x, y, z) = 0$ ces valeurs de x, y et z, nous aurons deux équations

$$Q(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0,$$
$$P(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0.$$

Ces deux équations définiront des surfaces fermées à deux dimensions : ces surfaces seront des surfaces cycliques.

Examinons, pour donner un exemple, un cas particulier bien simple. Considérons une surface pour laquelle les coordonnées x, y, z s'expriment uniformément par des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres u et v, et désignons par

$$\left\{ \begin{matrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \omega'_1 & \omega'_2 & \omega'_3 & \omega'_4 \end{matrix} \right\}$$

les quatre couples de périodes correspondantes. Il n'y a dans ce cas qu'une seule intégrale de première espèce, et l'on peut écrire

$$\int\int \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z} = \int\int du\, dv;$$

posons

$$u = \omega_1 U + \omega_2 V, \qquad v = \omega'_1 U + \omega'_2 V,$$

l'intégrale deviendra

$$(\omega_1 \omega'_2 - \omega_2 \omega'_1) \int\int dU\, dV,$$

et nous aurons une période en étendant l'intégrale précédente à un continuum *fermé* à deux dimensions, contenu dans le prismatoïde des périodes; or nous obtiendrons un tel continuum en faisant varier U et V de zéro à l'unité; car, pour U et V, le tableau des deux premières périodes est

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

On en conclut que les expressions $\omega_i \omega'_k - \omega_k \omega'_i$ $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ sont les périodes de l'intégrale double de première espèce attachée à la surface considérée.

V. — Digression sur les fonctions de trois variables complexes.

14. Je terminerai ce Chapitre en faisant quelques remarques sur les fonctions de trois variables complexes. Quand on passe du domaine de deux variables complexes à celui de trois variables, on peut de deux manières différentes étendre les notions relatives aux intégrales multiples.

Nous pouvons, en premier lieu, considérer l'intégrale double

$$(1) \qquad \int\int A\, dy\, dz + B\, dz\, dx + C\, dx\, dy$$

(où A, B, C sont des fonctions analytiques de x, y et z), étendue à une certaine *surface* à deux dimensions; le sens de cette intégrale se dé-

termine en suivant la même voie que M. Poincaré dans le Mémoire cité plus haut. La condition pour que le théorème de Cauchy s'étende à une telle intégrale, c'est-à-dire pour que cette intégrale étendue à une surface *fermée* soit nulle quand on peut, par une déformation continue, réduire cette surface à un point sans rencontrer de valeurs de x, y, z pour lesquelles A, B, C cessent d'être continues, est ici, comme dans le cas des quantités réelles,

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

En supposant vérifiée cette condition, qu'on peut appeler d'*intégrabilité*, et dans le cas où A, B, C sont des fonctions rationnelles de x, y, z, nous allons chercher quels seront les *résidus* de cette intégrale double, c'est-à-dire les diverses valeurs de cette intégrale prise sur une surface fermée à deux dimensions. Nous allons d'ailleurs nous borner au cas où l'on aurait

$$A = \frac{P}{S}, \qquad B = \frac{Q}{S}, \qquad C = \frac{R}{S},$$

P, Q, R, S étant des polynômes en x, y, z, le dernier étant supposé irréductible. La condition d'intégrabilité s'écrira alors

$$(2) \qquad P\frac{\partial S}{\partial x} + Q\frac{\partial S}{\partial y} + R\frac{\partial S}{\partial z} = S\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right).$$

Supposons d'abord que nous laissions à x une valeur constante, d'ailleurs arbitraire; notre intégrale double se réduit alors à

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dy\,dz}{S(x, y, z)}.$$

Prenons alors, dans le domaine des deux variables complexes y et z, les résidus de cette intégrale double. Ceux-ci seront, d'après M. Poincaré, les périodes de l'intégrale abélienne ordinaire

$$(3) \qquad \int \frac{P\,dy}{\frac{\partial S}{\partial z}},$$

relative à la relation algébrique entre y et z,

$$S(x, y, z) = 0.$$

Dans tout ceci, x figure comme un paramètre d'ailleurs arbitraire. Mais les résidus de l'intégrale double (1), si la condition d'intégrabilité est remplie, doivent être des constantes; il faut donc que les périodes de l'intégrale (3) ne dépendent pas de x. Il est essentiel de le vérifier, et cette vérification va précisément nous ramener à certain ordre d'idées qui a joué un rôle important dans le premier Chapitre.

La relation (2), en effet, n'est pas nouvelle pour nous; elle joue un rôle fondamental dans l'étude des intégrales de différentielles totales relatives aux surfaces algébriques. Je dis que l'intégrale

$$\int \frac{P\,dy - Q\,dx}{S'_z}$$

est une intégrale de différentielle totale relative à la surface algébrique $S(x, y, z) = 0$.

Il faut donc montrer, comme conséquence de l'identité (2), que

$$\frac{\partial\left(\frac{Q}{S'_z}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\frac{P}{S'_z}\right)}{\partial x} = 0,$$

x, y et z étant liés par la relation $S(x, y, z) = 0$.

En développant l'égalité précédente, on a

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial y} S'_z - \frac{\partial Q}{\partial z} S'_y\right) S'_z - Q(S''_{zy} S'_z - S''_{zz} S'_y)$$
$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial x} S'_z - \frac{\partial P}{\partial z} S'_x\right) S'_z - P(S''_{zx} S'_z - S''_{zz} S'_x) = 0.$$

Nous pouvons remplacer $PS'_x + QS'_y$ par $-RS'_z$ d'après l'identité (2).

Nous avons alors S'_z en facteur, et la relation à vérifier devient

$$-(QS''_{zy} + PS''_{zx} + RS''_{zz}) + S'_z\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) - S'_x \frac{\partial P}{\partial z} - S'_y \frac{\partial Q}{\partial z} = 0.$$

Or différentions maintenant l'identité (2) par rapport à z, et faisons dans le résultat $S = 0$, nous aurons précisément la relation précédente.

Nous avons ainsi vérifié que les périodes de l'intégrale (3) ne dépendent pas de x, puisque ces périodes sont des périodes de l'intégrale de différentielle totale

$$\int \frac{P\,dy - Q\,dx}{S'_z}.$$

Donc les périodes de cette intégrale simple seront des résidus de l'intégrale double (1). Réciproquement, d'ailleurs, tout résidu de (1) sera une période de l'intégrale précédente, car tout résidu peut toujours se ramener à l'intégrale prise le long d'une sorte de tore enveloppant un cycle linéaire de la surface algébrique $S(x, y, z) = 0$.

On voit que l'étude des intégrales de la forme (1), quand A, B, C sont des fonctions rationnelles, se rattache étroitement à la théorie des surfaces algébriques.

13. Il va en être de même pour la seconde catégorie d'intégrales multiples que l'on peut encore considérer. Envisageons maintenant l'intégrale triple

$$(1) \qquad \int\int\int \frac{P\,dx\,dy\,dz}{Q},$$

P et Q étant des polynômes en x, y, z; la définition de cette intégrale, étendue à un continuum à trois dimensions, se fait toujours d'après les mêmes principes. Nous n'avons ici aucune condition d'intégrabilité; cette intégrale, étendue à un continuum *fermé*, est nulle, quand ce continuum peut se réduire à un point sans rencontrer de systèmes de valeurs x, y, z, pour lesquelles D s'annule.

Cherchons quels sont les résidus de cette intégrale, c'est-à-dire les diverses valeurs qu'elle prend, quand on l'étend à un continuum fermé quelconque à trois dimensions.

Donnons d'abord à x et à y des valeurs fixes, et considérons une racine de l'équation en z

$$Q(x, y, z) = 0.$$

Le résidu ordinaire correspondant de l'intégrale simple

$$\int \frac{P\,dz}{Q}$$

sera manifestement

$$\frac{P}{Q_z}.$$

Nous avons donc maintenant à considérer l'intégrale double

$$(2) \qquad \int\int \frac{P\,dx\,dy}{Q_z}.$$

Quel devra être le champ de l'intégration? Cette intégrale double devra être étendue à un continuum *fermé* de points analytiques (x, y, z) ou, en d'autres termes, d'après nos définitions précédentes, à un *cycle à deux dimensions*, de la surface Q.

Nous en concluons que les résidus de l'intégrale triple (1) sont les périodes de l'intégrale double (2), cette intégrale double étant relative à la surface algébrique $Q(x, y, z) = 0$.

CHAPITRE III.

TRANSFORMATION DES SURFACES EN ELLES-MÊMES.

I. — Théorème sur la transformation des surfaces.

1. M. Schwarz a montré que les courbes du genre zéro et du genre un sont les seules qui puissent être transformées en elles-mêmes par une substitution birationnelle renfermant un paramètre arbitraire. Le théorème de l'éminent géomètre de Göttingen peut être établi de la manière suivante.

Soit

$$f(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe que transforme en elle-même la substitution birationnelle

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = R\ (t, x, y), \\ y' = R_1(t, x, y), \end{cases}$$

où nous mettons en évidence le paramètre t, dont R et R_1 seront des fonctions analytiques, d'ailleurs quelconques. Nous pouvons d'ailleurs supposer, comme l'indique M. Schwarz, que, pour une valeur particulière $t = t_0$ du paramètre t, la substitution précédente se réduit à

$$x' = x, \qquad y' = y.$$

Cela posé, supposons que la courbe soit de genre p, et considérons les intégrales de première espèce

$$\int \frac{Q_1(x, y)\,dx}{f'_y}, \quad \int \frac{Q_2(x, y)\,dx}{f'_y}, \quad \ldots, \quad \int \frac{Q_p(x, y)\,dx}{f'_y},$$

l'élément

$$\frac{Q_1(x', y')\,dx'}{f'_{y'}},$$

quand on remplacera x' et y' par les valeurs (1) en x et y, prendra la forme

$$A_1 \frac{Q_1(x, y)\,dx}{f'_y} + A_2 \frac{Q_2(x, y)\,dx}{f'_y} + \ldots + A_p \frac{Q_p(x, y)\,dx}{f'_y},$$

puisque une intégrale de première espèce doit nécessairement après la transformation rester encore une intégrale de première espèce. Écrivons donc

$$\frac{Q_1(x', y')\,dx'}{f'_{y'}} = A_1 \frac{Q_1(x, y)\,dx}{f'_y} + A_2 \frac{Q_2(x, y)\,dx}{f'_y} + \ldots + A_p \frac{Q_p(x, y)\,dx}{f'_y}.$$

Les coefficients A pourraient être des fonctions du paramètre t, mais nous allons précisément montrer qu'ils n'en dépendent pas. On le verra tout de suite par la considération des périodes; donnons en effet à t une valeur arbitraire, mais fixe, et faisons décrire un cycle au point (x, y), auquel correspondent pour les p intégrales envisagées les

périodes

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_p:$$

le point (x', y') décrira aussi un cycle, et soit ω'_1 la période correspondante; on aura donc

$$\omega'_1 = A_1\omega_1 + A_2\omega_2 + \ldots + A_p\omega_p,$$

faisant décrire à (x, y), $(p-1)$ autres cycles, nous obtiendrons $p-1$ autres relations de cette forme, et, comme on peut toujours supposer les p cycles tellement choisis que le déterminant des coefficients A_1, $A_2, \ldots A_p$, dans ces p relations, soit différent de zéro, on voit que les quantités A se trouvent complètement déterminées par des relations où ne figure pas le paramètre t : elles sont donc indépendantes de ce paramètre.

De plus, nous avons dit que, pour $t = t_0$, on a

$$x' = x, \qquad y' = y;$$

on aura donc

$$A_1 = 1, \qquad A_2 = A_3 = \ldots = A_p = 0,$$

et il reste par suite

$$\frac{Q_1(x', y')\,dx'}{f'_{y'}} = \frac{Q_{10}(x, y)\,dx}{f'_y};$$

dans l'hypothèse où l'on aurait $p > 1$, on aura, par les mêmes raisonnements,

$$\frac{Q_2(x', y')\,dx'}{f'_{y'}} = \frac{Q_2(x, y)\,dx}{f'_y}:$$

de là nous concluons immédiatement, en divisant,

$$\frac{Q_1(x', y')}{Q_2(x', y')} = \frac{Q_1(x, y)}{Q_2(x, y)};$$

or une telle égalité est impossible, car elle établit entre les deux points analytiques (x, y) et (x', y') une relation où ne figure pas de paramètre arbitraire. *Le théorème est donc démontré.*

Remarque. — Le point capital dans la démonstration consiste à faire voir que les coefficients A ne dépendent pas de t : c'est ce que nous

avons montré en considérant les périodes. On peut y parvenir par une autre voie.

Reprenons la substitution

$$x' = R(x, y), \qquad y' = R_1(x, y),$$

les coefficients figurant dans les fonctions rationnelles $R(x, y)$ et $R_1(x, y)$ sont, avons-nous supposé, des fonctions d'un paramètre; mais, d'autre part, ces coefficients seront nécessairement des fonctions *algébriques* d'un ou de plusieurs d'entre eux restant arbitraires; désignons ceux-ci par la lettre θ. Dans ces conditions, reprenons la relation

$$\frac{Q_1(x', y')\,dx'}{f'_{y'}} = A_1 \frac{Q_1(x, y)\,dx}{f'_y} + \ldots + A_p \frac{Q_p(x, y)\,dx}{f'_y},$$

les A vont alors être des fonctions algébriques des quantités θ. Or je dis que ces fonctions doivent être des constantes. Écrivons en effet la relation précédente sous la forme

$$\int_{x'_0, y'_0}^{x', y'} \frac{Q_1(x, y)\,dx'}{f'_{y'}} = A_1 \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{Q_1(x, y)\,dx}{f'_y} + \ldots + A_p \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{Q_p(x, y)\,dx}{f'_y},$$

(x'_0, y'_0) correspondant à (x_0, y_0). Cela posé, laissons (x, y) fixe ainsi que (x_0, y_0); le second membre va être une fonction *algébrique* des θ; si cette fonction ne se réduit pas à une constante, elle deviendra infinie pour certaines valeurs des θ; or cela est impossible, car le premier membre est une intégrale de première espèce, et de plus, x' et y' étant aussi des fonctions algébriques des θ, le point analytique (x', y') ne décrit pas une infinité de cycles avant d'arriver aux limites de l'intégration correspondant à des valeurs de θ qui rendraient infini le second membre. L'expression

$$A_1 \int^{x, y} \frac{Q(x, y)\,dx}{f'_y} + \ldots + A_p \int^{x, y} \frac{Q_p(x, y)\,dx}{f'_y}$$

ne dépend donc pas de θ; c'est donc une intégrale *fixe* de première espèce, attachée à la courbe

$$f(x, y) = 0;$$

par suite, les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_p$ doivent eux-mêmes *séparément* être indépendants de θ; ce qui nous donne de nouveau le résultat annoncé.

2. *Proposition analogue relative aux surfaces algébriques.* — Nous allons maintenant faire connaître, pour les surfaces algébriques, une proposition analogue à celle que M. Schwarz a donnée pour les courbes planes.

Voici le nouveau théorème que nous nous proposons d'établir :

Si une surface peut être transformée en elle-même par une substitution birationnelle renfermant deux paramètres arbitraires, la surface sera du genre zéro ou du genre un.

Le genre dont il est question dans cet énoncé est celui que M. Nœther appelle *Flachengeschlecht*, et il importe de préciser ce qu'on doit entendre ici par transformation avec *deux* paramètres arbitraires; ces deux paramètres devront figurer de telle manière dans la transformation qu'à un point de la surface corresponde, par la transformation et en faisant varier les paramètres, non pas une courbe, mais bien un point *arbitraire* de la surface.

La démonstration du théorème énoncé sera bien facile, après ce que nous venons de dire pour les courbes algébriques. Nous allons en effet suivre entièrement le même mode de démonstration; la surface étant supposée de genre p, considérons les p *intégrales doubles de première espèce* attachées à la surface

$$\iint \frac{Q_1(x, y, z)\,dx\,dy}{f_z}, \quad \ldots, \quad \iint \frac{Q_p(x, y, z)\,dx\,dy}{f_z},$$

en désignant par $f(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface de degré m, et les Q étant des polynômes d'ordre $m - 4$. Écrivons les équations de la transformation birationnelle

$$\begin{aligned} x' &= R(t, t', x, y, z), \\ y' &= R_1(t, t', x, y, z), \\ z' &= R_2(t, t', x, y, z), \end{aligned}$$

en mettant en évidence les deux paramètres t et t'.

L'élément

$$\frac{Q_1(x', y', z')\,dx'\,dy'}{f'_{z'}},$$

quand on remplacera x', y' et z' par leur valeur en x, y, z, prendra la forme

$$A_1 \frac{Q_1(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z} + A_2 \frac{Q_2(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z} + \ldots + A_p \frac{Q_p(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

puisque une intégrale double de première espèce doit nécessairement, après la transformation, rester encore une intégrale de première espèce. Écrivons donc

$$\frac{Q_1(x', y', z')\,dx'\,dy'}{f'_{z'}} = A_1 \frac{Q_1(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z} + \ldots + A_p \frac{Q_p(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

les coefficients A pouvant être des fonctions des paramètres t et t'; mais nous allons montrer qu'ils n'en dépendent pas. Le premier mode de transformation employé plus haut pourrait être encore employé ici, mais il faudrait faire intervenir les périodes de l'intégrale double; la seconde voie n'exigera au contraire aucune modification pour ainsi dire dans la suite des raisonnements.

Reprenons en effet la substitution

$$x' = R(x, y, z), \qquad y' = R_1(x, y, z), \qquad z' = R_2(x, y, z);$$

les coefficients figurant dans les fonctions rationnelles R, R_1 et R_2 seront nécessairement des fonctions algébriques de deux ou plusieurs entre eux restant arbitraires, que nous désignerons encore par la lettre θ. Écrivons, d'autre part, la relation précédente sous la forme

$$\int_{x'_0}^{x'} \int_{y'_0}^{y'} \frac{Q_1(x', y', z')\,dx'\,dy'}{f'_{z'}} = A_1 \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \frac{Q_1(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z} + \ldots$$
$$+ A_p \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \frac{Q_p(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}.$$

Cela posé, laissons (x, y, z) fixe ainsi que (x_0, y_0, z_0); le second membre va être une fonction algébrique des θ; si cette fonction ne se réduit pas à une constante, elle deviendra infinie pour certaines valeurs

des θ; or cela est impossible, car le premier membre est une intégrale double de première espèce. On conclut, comme précédemment, que les coefficients A ne dépendent pas des paramètres.

On peut supposer la transformation telle que, pour certaines valeurs non singulières des paramètres t et t', soit $t = t_0$, $t' = t_0$, la transformation se réduise à

$$x' = x, \qquad y' = y, \qquad z' = z.$$

On voit que, dans ce cas, on aura

$$A_1 = 1, \qquad A_2 = A_3 = \ldots = A_p = 0.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\frac{Q_1(x', y', z')\,dx'\,dy'}{f'_{z'}} = \frac{Q_1(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_{z'}};$$

si l'on a $p < 1$, on aura pareillement

$$\frac{Q_2(x', y', z')\,dx'\,dy'}{f'_{z'}} = \frac{Q_2(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_{z'}},$$

et des deux égalités précédentes on conclut

$$\frac{Q_1(x', y', z')}{Q_2(x', y', z')} = \frac{Q_1(x, y, z)}{Q_2(x, y, z)},$$

égalité impossible, car pour une valeur fixe du point (x, y, z) correspondrait pour (x', y', z') une courbe sur la surface.

La surface ne peut donc être d'un genre supérieur à l'unité, ce qui est précisément le théorème énoncé.

II. — Surfaces de genre supérieur a un admettant un faisceau de transformations.

3. Nous avons supposé qu'il y avait au moins deux paramètres arbitraires dans la transformation considérée; l'examen du cas où il y aurait seulement un paramètre arbitraire conduit à des conclusions bien dif-

férentes. En supposant p supérieur à l'unité, on pourra encore raisonner comme plus haut et écrire

$$\frac{Q_1(x', y', z')}{Q_2(x', y', z')} = \frac{Q_1(x, y, z)}{Q_2(x, y, z)};$$

mais nous ne pouvons plus conclure de cette égalité que p ne peut surpasser l'unité.

Il est même bien facile de voir que, dans une surface susceptible d'être transformée en elle-même par une transformation birationnelle renfermant un seul paramètre arbitraire, le nombre p peut être quelconque. Considérons, en effet, une surface dont les coordonnées soient fonctions rationnelles de quatre paramètres λ, μ, λ', μ',

$$\begin{aligned} x &= R(\lambda, \mu, \lambda', \mu'), \\ y &= R_1(\lambda, \mu, \lambda', \mu'), \\ z &= R_2(\lambda, \mu, \lambda', \mu'), \end{aligned}$$

les deux paramètres λ et μ étant liés par la relation algébrique

$$(1) \qquad f(\lambda, \mu) = 0,$$

et les deux paramètres λ' et μ' par une seconde relation algébrique

$$(2) \qquad F(\lambda', \mu') = 0,$$

et supposons de plus, ce qu'il est évidemment possible de réaliser, qu'à un point arbitraire de la surface ne correspondent qu'un seul système de valeurs (λ, μ) et un seul système de valeurs (λ', μ').

Supposons la relation algébrique (2) de genre p supérieur à l'unité, et la relation (1) de genre un. Dans ces conditions, la courbe f pouvant être transformée en elle-même par une substitution birationnelle renfermant un paramètre arbitraire, il en sera évidemment de même de la surface proposée.

Quel sera le genre de cette surface? Il est aisé de voir qu'il est égal au genre p de la relation (2). Soient, en effet,

$$\int S(\lambda, \mu)\, d\lambda$$

et

$$\int S_1(\lambda', \mu')\,d\lambda', \quad \ldots, \quad \int S_p(\lambda', \mu')\,d\lambda'$$

les intégrales de première espèce correspondant aux courbes f et F.

J'envisage l'intégrale double

$$\int\int S(\lambda, \mu)\, S_i(\lambda', \mu')\,d\lambda\, d\lambda',$$

qui a évidemment la forme

$$\int\int P(x, y, z)\,dx\,dy,$$

P étant une fonction rationnelle de x, y, z; cette intégrale sera une intégrale double de *première espèce* attachée à la surface. En faisant varier i de 1 à p, on obtient ainsi p intégrales doubles linéairement indépendantes, et par suite le genre de la surface est au moins égal à p. Il est aisé de montrer qu'il est précisément égal à p; toute intégrale double sera en effet de la forme

$$\int\int \varphi(\lambda, \mu, \lambda', \mu')\,d\lambda\, d\lambda';$$

supposons-la de première espèce; il sera d'abord nécessaire que l'intégrale simple

$$\int \varphi(\lambda, \mu, \lambda', \mu')\,d\lambda,$$

λ' et μ' étant considérés comme des constantes, soit une intégrale de première espèce pour la courbe

$$f(\lambda, \mu) = 0;$$

on a donc

$$\varphi(\lambda, \mu, \lambda', \mu') = M\,S(\lambda, \mu),$$

M ne dépendant pas de λ, μ et étant par suite une fonction rationnelle de λ' et μ'. On voit ensuite que

$$\int M\,d\lambda'$$

doit être une intégrale de première espèce pour la courbe

$$F(\lambda', \mu') = 0,$$

et l'on en conclut

$$M = A_1 S_1(\lambda', \mu') + A_2 S_2(\lambda', \mu') + \ldots + A_p S_p(\lambda', \mu'),$$

les A étant des constantes, ce qui démontre notre théorème.

Considérons maintenant les polynômes adjoints d'ordre $m - 4$ correspondant à la surface, dont nous représenterons l'équation par

$$\psi(x, y, z) = 0:$$

soit une intégrale double de première espèce

$$\int\int \frac{Q_1(x, y, z)}{\psi_z} dx\, dy;$$

ce sera, par exemple, celle qui était représentée tout à l'heure par

$$\int\int S(\lambda, \mu) S_1(\lambda', \mu')\, d\lambda\, d\lambda'.$$

Étudions l'intersection de $Q_1(x, y, z) = 0$ avec la surface. Elle sera donnée par l'équation

$$S(\lambda, \mu) = 0,$$

et par cette autre

$$S_1(\lambda', \mu') = 0.$$

La première équation ne nous donnera rien en dehors des lignes multiples de la surface, car la courbe adjointe d'une courbe de genre *un* ne rencontre celle-ci qu'aux points multiples. L'intersection cherchée sera donc donnée par

$$S_1(\lambda', \mu') = 0,$$

qui, en dehors des points multiples, nous donne, sur la courbe

$$F(\lambda', \mu') = 0,$$

$2p - 2$ points, comme il est bien connu. Ainsi, toute surface adjointe

d'ordre $m-4$

$$Q_1(x, y, z) = 0$$

rencontre, en dehors des lignes multiples, la surface ψ suivant $2p-2$ courbes, qui sont manifestement du genre un.

4. Après avoir étudié ce cas particulier, considérons d'une manière générale une surface algébrique pouvant être transformée en elle-même par une substitution birationnelle renfermant un paramètre arbitraire, *dans le cas où le genre de cette surface est supérieur à l'unité*. Désignant par

$$(S) \qquad \begin{cases} x' = R(t, x, y, z), \\ y' = R_1(t, x, y, z), \\ z' = R_2(t, x, y, z) \end{cases}$$

cette substitution, on a, comme il a été dit plus haut et en conservant les mêmes notations,

$$\frac{Q_1(x', y', z')}{Q_2(x', y', z')} = \frac{Q_1(x, y, z)}{Q_2(x, y, z)}.$$

J'envisage maintenant le faisceau de surfaces

$$Q_1(x, y, z) - \lambda Q_2(x, y, z) = 0$$

pour une valeur fixe, d'ailleurs quelconque, donnée à λ; cette équation définit (en dehors des lignes multiples et des lignes qui seraient invariables avec λ) une courbe sur la surface. Cette courbe peut d'ailleurs être décomposable en plusieurs courbes irréductibles; nous désignerons l'une d'elles par C.

La courbe C se transformera évidemment en elle-même par la substitution (S); elle sera donc du genre un, car elle ne peut être du genre zéro, puisque le genre de la surface est supérieur à un. Nous pouvons ajouter que son module ne dépend pas de λ; la courbe est, en effet, donnée par les équations

$$x' = R(t, x, y, z), \qquad y' = R_1(t, x, y, z), \qquad z' = R_2(t, x, y, z),$$

en désignant par (x, y, z) les coordonnées d'un point fixe, d'ailleurs

quelconque, situé sur elle, et x', y', z' désignant les coordonnées courantes, fonctions du paramètre t. Or les coefficients de x, y, z dans la substitution (S) peuvent être considérés comme fonctions algébriques d'un d'entre eux, ou, ce qui revient au même, comme fonctions rationnelles de deux paramètres α et β liés par une relation algébrique irréductible $P(\alpha, \beta) = 0$.

Les périodes de l'intégrale de première espèce correspondant à la courbe C ne pourront être que des multiples des périodes d'une intégrale de première espèce correspondant à la courbe P; le module de la courbe C ne dépend donc pas de x, y, z, et par suite de λ, comme nous l'avions annoncé.

Ainsi, *l'intersection de la surface avec le faisceau*

$$Q_1(x, y, z) - \lambda Q_2(x, y, z) = 0$$

nous donnera un certain nombre de courbes, variables avec λ, qui seront de genre un, et dont le module ne dépendra pas de λ.

Mais approfondissons davantage la nature de cette intersection. Je dis tout d'abord qu'il n'est pas possible qu'il n'y ait qu'une seule courbe, sauf si $p = 2$; car, en désignant par $p^{(1)}$ le genre de la partie mobile de l'intersection supposée irréductible, on a, d'après M. Nœther (*Math. Annalen*, t. VIII, p. 522),

$$p^{(1)} \geqq 2p - 3.$$

Il résulte alors d'un autre théorème de M. Nœther (même Mémoire, p. 523) que l'intersection, n'étant pas irréductible, se compose de $(p-1)$ courbes du genre un. Ces courbes ne forment pas un réseau à $(p-1)$ paramètres, mais seulement un faisceau à un paramètre. On obtiendra ce faisceau le plus simplement en prenant le faisceau

$$Q_1(x, y, z) - \lambda Q_2(x, y, z) = 0$$

des surfaces adjointes passant par $(p-2)$ points fixes, d'ailleurs arbitraires.

Ce faisceau passera par $(p-2)$ points fixes, et il y aura alors une seule courbe mobile du genre un.

Considérons la projection de cette courbe sur le plan des xy; soit

$$f(x, y, \lambda) = 0,$$

f étant un entier en x, y, λ, et nous pouvons supposer que z sera fraction rationnelle de x, y et λ.

La courbe précédente est de genre un, et son module doit être indépendant de λ. Par conséquent, on pourra exprimer x et y de la manière suivante : x et y seront fonctions rationnelles d'un paramètre θ et de la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré, dont les coefficients ne dépendront pas de λ, soit $\Lambda(\theta)$; les coefficients de ces fonctions rationnelles seront des fonctions algébriques de λ. Ils pourront donc s'exprimer par des fonctions rationnelles de deux paramètres α et β, liées par une relation algébrique (λ étant lui-même rationnel en α et β),

$$P(\alpha, \beta) = 0.$$

On aura donc, pour notre surface,

$$(\mu) \qquad \begin{cases} x = R\left[\alpha, \beta, \theta, \sqrt{\Lambda(\theta)}\right], \\ y = R_1\left[\alpha, \beta, \theta, \sqrt{\Lambda(\theta)}\right], \\ z = R_2\left[\alpha, \beta, \theta, \sqrt{\Lambda(\theta)}\right], \end{cases}$$

les R étant rationnelles en α, β, θ et $\sqrt{\Lambda(\theta)}$.

Telles sont les expressions que l'on peut donner aux coordonnées d'un point quelconque de la surface; d'ailleurs, dans ces expressions, rien ne nous autorise à supposer, comme dans le cas particulier du début, qu'à un point arbitraire de la surface ne correspond qu'un système de valeurs de (α, β) et $\left[\theta, \sqrt{\Lambda(\theta)}\right]$.

Mais, après avoir obtenu les équations (μ), ou en partant *a priori* d'expressions de ce genre, il sera facile de décider si la surface correspondante admet une infinité de transformations birationnelles avec un paramètre arbitraire. Remarquons d'abord que θ et $\sqrt{\Lambda(\theta)}$ seront, par les équations (μ), fonctions rationnelles des x, y, z, α et β; car, quand on a α et β, la courbe f sera déterminée; donc θ et $\sqrt{\Lambda(\theta)}$ ont alors une valeur déterminée pour un point arbitraire de la courbe.

On peut maintenant supposer que $A(\theta)$ a la forme normale; soit donc

$$\theta = \operatorname{sn} t \quad \text{et} \quad \sqrt{A(\theta)} = \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t;$$

on aura

$$x = R\,(\alpha, \beta, \operatorname{sn} t, \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t),$$
$$y = R_1(\alpha, \beta, \operatorname{sn} t, \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t),$$
$$z = R_2(\alpha, \beta, \operatorname{sn} t, \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t).$$

Or la transformation birationnelle proviendra, si elle existe, du changement de t en $t + h$, h étant une constante arbitraire.

Soit donc

$$x' = R[\alpha, \beta, \operatorname{sn}(t+h), \operatorname{cn}(t+h) \operatorname{dn}(t+h)], \qquad \ldots;$$

donc, puisque $\operatorname{sn} t$ et $\operatorname{cn} t \operatorname{dn} t$ sont des fonctions rationnelles de x, y, z, α et β, on aura

$$x' = P\,(\alpha, \beta, x, y, z, h),$$
$$y' = P_1(\alpha, \beta, x, y, z, h),$$
$$z' = P_2(\alpha, \beta, x, y, z, h),$$

les P étant rationnelles en x, y, z, α et β.

Si donc α et β sont fonctions rationnelles de x, y, z, il n'y aura aucun doute; x', y', z' seront fonctions rationnelles de x, y, z. Quand α et β sont seulement fonctions algébriques de x, y, z, il faudra, en faisant la substitution, vérifier si x', y', z' sont rationnelles en x, y, z.

III. — Surfaces du genre zéro et un.

5. Nous allons maintenant rechercher les surfaces admettant un *groupe continu* de transformations birationnelles en elles-mêmes, sans nous inquiéter du genre de la surface [1].

J'emploie ici l'expression de groupe de transformations dans le même

[1] L'hypothèse que les transformations forment un groupe est essentielle, car on pourrait avoir des transformations dépendant de paramètres arbitraires, et qui ne formeraient pas un groupe de transformations.

sens que M. Sophus Lie, c'est-à-dire que les deux équations

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = \varphi(x, y, a_1, a_2, \ldots, a_r), \\ y' = \psi(x, y, a_1, a_2, \ldots, a_r), \end{cases}$$

relatives aux variables indépendantes x et y, et contenant r paramètres a, définiront un groupe de transformations, si les substitutions (1) et

$$(2)\qquad \begin{cases} x'' = \varphi(x', y', b_1, b_2, \ldots, b_r), \\ y'' = \psi(x', y', b_1, b_2, \ldots, b_r), \end{cases}$$

donnent, pour x'' et y'', en fonction de x et y,

$$x'' = \varphi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_r),$$
$$y'' = \varphi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_r),$$

les c dépendant uniquement des a et des b.

Démontrons d'abord un lemme relatif à un groupe de transformations à deux paramètres, en supposant *permutables* les transformations de ce groupe. [Nous dirons, pour abréger, qu'un tel groupe est permutable (¹).]

Représentons ce groupe par

$$x' = \varphi(x, y, a_1, a_2),$$
$$y' = \psi(x, y, a_1, a_2).$$

Nous pouvons de ces deux relations et des deux suivantes

$$dx' = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy,$$
$$dy' = \frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,dy,$$

(¹) Je me sers de cette locution pour éviter une périphrase; aucune confusion n'est à craindre ici avec une locution analogue employée dans la théorie des substitutions.

éliminer a_1 et a_2; *je dis que le résultat de l'élimination peut se mettre sous la forme*

$$(\alpha)\begin{cases} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = P(x',y')\,dx' + Q(x',y')\,dy', \\ P_1(x,y)\,dx + Q_1(x,y)\,dy = P_1(x',y')\,dx' + Q_1(x',y')\,dy'. \end{cases}$$

Pour démontrer ce théorème, nous supposerons connues les propositions générales données par M. Lie sur les groupes de transformations. Soient

$$\delta x = X_1(x,y)\,\delta t, \qquad \delta x = X_2(x,y)\,\delta t,$$
$$\delta y = Y_1(x,y)\,\delta t, \qquad \delta y = Y_2(x,y)\,\delta t$$

les deux transformations infinitésimales linéairement indépendantes du groupe.

Ces deux transformations infinitésimales formant un groupe dont les substitutions sont permutables, nous avons entre les X et les Y les deux identités

$$(\beta)\qquad \begin{cases} A_1(X_2) - A_2(X_1) = 0, \\ A_1(Y_2) - A_2(Y_1) = 0, \end{cases}$$

en posant

$$A_1(F) = X_1\frac{\partial F}{\partial x} + Y_1\frac{\partial F}{\partial y},$$

$$A_2(F) = X_2\frac{\partial F}{\partial x} + Y_2\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Cela posé, avec les deux transformations infinitésimales précédentes, on obtiendra les équations finies du groupe, en considérant le système d'équations différentielles ordinaires où λ_1 et λ_2 sont des constantes arbitraires

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2. \end{cases}$$

On tire de là, par l'intégration,

$$x = \varphi[x_0, y_0, \lambda_1(t-t_0), \lambda_2(t-t_0)],$$
$$y = \psi[x_0, y_0, \lambda_1(t-t_0), \lambda_2(t-t_0)],$$

en formant l'intégrale, qui pour $t = t_0$ donne

$$x = x_0,$$
$$y = y_0.$$

Si l'on pose alors

$$\lambda_1(t - t_0) = a_1, \qquad \lambda_2(t - t_0) = a_2,$$

le groupe peut s'écrire

$$(4) \qquad \begin{cases} x' = \varphi(x, y, a_1, a_2), \\ y' = \psi(x, y, a_1, a_2). \end{cases}$$

Mais les équations (3) donnent, en remplaçant $\lambda_1 dt$ par da_1 et $\lambda_2 dt$ par da_2,

$$dx = X_1 da_1 + X_2 da_2,$$
$$dy = Y_1 da_1 + Y_2 da_2.$$

On en tire

$$da_1 = P\ dx + Q\ dx,$$
$$da_2 = P_1 dx + Q_1 dy,$$

les P et Q étant des fonctions de x et y. Or les relations (β) montrent que

$$P\,dx + Q\,dy \qquad \text{et} \qquad P_1 dx + Q_1 dy$$

sont des différentielles totales exactes, comme le prouve un calcul facile. Par suite, le groupe donné par les équations (4) peut se mettre sous la forme

$$a_1 = \int_{x,y}^{x',y'} P\ dx + Q\ dy,$$
$$a_2 = \int_{x,y}^{x',y'} P_1 dx + Q_1 dy.$$

Nous avons donc bien, entre (x, y) et (x', y') la relation (α) écrite

plus haut,

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = P(x', y')\,dx' + Q(x', y')\,dy',$$
$$P_1(x, y)\,dx + Q_1(x, y)\,dy = P_1(x', y')\,dx' + Q_1(x', y')\,dy'.$$

6. Ce lemme établi, supposons que nous ayons une surface qui se transforme en elle-même pour une infinité de substitutions *birationnelles, formant un groupe permutable à deux paramètres.* Soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface et soit

$$x' = F_1(x, y, z, a_1, a_2),$$
$$y' = F_2(x, y, z, a_1, a_2),$$
$$z' = F_3(x, y, z, a_1, a_2)$$

cette substitution supposée birationnelle. Il n'y a, en réalité, que deux variables indépendantes; nous pouvons donc appliquer le lemme. Les substitutions infinitésimales seront évidemment rationnelles en x, y et z. Les relations entre (x, y, z) et (x', y', z') pourront donc s'écrire sous la forme différentielle adoptée dans le paragraphe précédent,

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy = P(x', y', z')\,dx' + Q(x', y', z')\,dy'.$$
$$P_1(x, y, z)\,dx + Q_1(x, y, z)\,dy = P_1(x', y', z')\,dx' + Q_1(x', y', z')\,dy'.$$

les P et Q étant ici *rationnels* en x, y et z.

Nous aurons donc

$$\int_{\alpha, \beta, \gamma}^{x, y, z} P\,dx + Q\,dy = \int_{\alpha', \beta', \gamma'}^{x', y', z'} P\,dx + Q\,dy,$$
$$\int_{\alpha, \beta, \gamma}^{x, y, z} P_1\,dx + Q_1\,dy = \int_{\alpha', \beta', \gamma'}^{x', y', z'} P_1\,dx + Q_1\,dy.$$

les limites inférieures étant deux *points* arbitraires (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$.

Or à un système de valeurs des seconds membres, pour une valeur donnée de (x', y', z'), ne correspond qu'un système de valeurs de (x, y, z).

Nous arrivons donc à la conclusion suivante : *Les équations*

$$\int^{x,y,z} P\,dx + Q\,dy = u,$$

$$\int^{x,y,z} P_1\,dx + Q_1\,dy = v$$

donnent pour x, y et z des fonctions uniformes de u et v.

Ainsi les coordonnées d'un point quelconque x, y, z de la surface s'exprimeront par des fonctions uniformes de u et v, provenant de l'inversion d'intégrales de différentielles totales attachées à la surface [1].

7. Après ce cas particulier, nous devons examiner le cas général d'une surface, admettant une infinité de transformations birationnelles formant *un groupe à un nombre quelconque de paramètres.*

Le groupe étant d'ordre fini, il y a nécessairement dans ce groupe un sous-groupe à *un* paramètre (*voir* Lie, *Math. Annalen*, t. 16, p. 463), et, d'après Lie, un tel sous-groupe à un paramètre peut être obtenu de la manière suivante. On prendra une substitution infinitésimale quelconque du groupe primitif,

$$\delta x = X(x, y, z)\,\delta t, \qquad \delta y = Y(x, y, z)\,\delta t, \qquad \delta z = Z(x, y, z)\,\delta t,$$

X, Y et Z étant bien évidemment ici des fonctions rationnelles de x, y et z.

Ces trois équations reviennent d'ailleurs à deux, comme toutes celles que je vais écrire, puisque $S(x, y, z) = 0$, en désignant par $S = 0$ l'équation de la surface.

---

[1] J'ai énoncé le théorème précédent (*Comptes rendus*, octobre 1886), sans préciser la façon dont je supposais implicitement que figuraient les paramètres a_1 et a_2 dans la transformation birationnelle. Dans le même numéro des *Comptes rendus*, M. Poincaré a nettement indiqué le profit que l'on pouvait tirer, dans cette question, de la notion de groupes de transformations.

Les équations

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y, z),$$

$$\frac{dy}{dt} = Y(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dt} = Z(x, y, z),$$

donneront par l'intégration

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} x = f(x_0, y_0, z_0, t - t_0), \\ y = \varphi(x_0, y_0, z_0, t - t_0), \\ z = \psi(x_0, y_0, z_0, t - t_0), \end{cases}$$

x_0, y_0, z_0 étant les valeurs initiales pour $t = t_0$; et l'on a le groupe à un seul paramètre a

$$x' = f(x, y, z, a),$$
$$y' = \varphi(x, y, z, a),$$
$$z' = \psi(x, y, z, a);$$

f, φ, ψ seront rationnelles en x, y, z, puisque ce groupe est un sous-groupe contenu dans le groupe initial.

Mais revenons au système

$$(\mathrm{A}) \quad \frac{dx}{dt} = X(x, y, z), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dt} = Z(x, y, z);$$

son intégrale générale devra être une fonction uniforme de t; car, en changeant dans x, y, z, t en $t + h$, x, y, z deviennent x', y', z' et l'on a, d'après les équations (I),

$$x' = f(x, y, z, h),$$
$$y' = \varphi(x, y, z, h),$$
$$z' = \psi(x, y, z, h).$$

Donc, d'après un mode de raisonnement fréquemment employé, par exemple dans la théorie des fonctions abéliennes, les fonctions pourront s'étendre d'une manière uniforme de proche en proche, et, par suite, l'intégrale générale du système (A) est fonction uniforme de t.

Nous venons de voir que, x, y, z désignant une solution quelconque du système (A),

$$(1) \qquad f(x, y, z, h), \quad \varphi(x, y, z, h), \quad \psi(x, y, z, h),$$

donnera encore une solution de ce système. Les f, φ, ψ sont des fonctions rationnelles parfaitement déterminées en x, y et z.

Cela posé, écrivons ces fonctions rationnelles en mettant pour coefficients des lettres indéterminées, soit

$$F(x, y, z), \quad \Phi(x, y, z), \quad \Psi(x, y, z).$$

Écrivons que, x, y, z désignant une solution de (A), ces trois fonctions satisfont au système (A).

Divers cas pourront se présenter :

1° Il peut rester un arbitraire parmi les coefficients, quelle que soit la solution (x, y, z). Donc, dans F, Φ, Ψ les coefficients s'expriment en fonctions rationnelles de deux quantités liées par une relation algébrique; il en résulte que dans f, φ, ψ les coefficients, qui sont des fonctions uniformes de h, seront des fonctions doublement périodiques de h (ou dégénérescences).

On a, dans ce cas, sur la surface, *un faisceau de courbes de genre zéro ou un*.

2° Il reste deux arbitraires. Écrivons alors

$$\begin{aligned} x' &= F(x, y, z, \alpha, \beta), \\ y' &= \Phi(x, y, z, \alpha, \beta), \\ z' &= \Psi(x, y, z, \alpha, \beta). \end{aligned}$$

On peut dire que l'on a là l'intégrale générale du système (A). Deux cas peuvent d'ailleurs se présenter ici, suivant que ces équations définissent ou non un *groupe* de transformations birationnelles à deux paramètres. Plaçons-nous d'abord dans le cas de la négative.

I. Prenons

$$F(x, y, z, \alpha, \beta), \qquad \Phi(x, y, z, \alpha, \beta), \qquad \ldots$$

et

$$F(x, y, z, \alpha_1, \beta_1), \quad \Phi(x, y, z, \alpha_1, \beta_1), \quad \ldots,$$

α, β et α_1, β_1 ayant des valeurs arbitraires. Si l'on forme

$$(1) \qquad F[F(x, y, z, \alpha, \beta), \Phi, \Psi, \alpha_1, \beta_1], \quad \ldots,$$

on aura nécessairement une solution de (A). Elle devra donc rentrer dans le type

$$(2) \qquad F(x, y, z, \alpha_2, \beta_2), \quad \ldots,$$

α_2 et β_2 ne dépendant pas de t. Mais, par hypothèse, la substitution ne définit pas un groupe de transformations; par conséquent on ne pourra pas déterminer α_2, β_2 en fonction de α_1, β_1 et α, β, de manière que (1) et (2) coïncident pour tout point (x, y, z) de la surface S. En égalant (1) à (2), on aura donc nécessairement une relation algébrique entre x, y, z, et les constantes α_2 et β_2 dépendront de la solution particulière x, y, z que l'on considère.

Il y aura donc dans ce cas entre x, y, z une relation algébrique, variable d'une intégrale à l'autre, et distincte bien entendu de

$$S(x, y, z) = 0.$$

Ces fonctions de t seront donc encore des fonctions doublement périodiques (ou dégénérescences). Considérant une intégrale particulière x, y, z, l'intégrale générale x', y', z' s'obtiendra par les formules précédentes. *On a donc encore sur la surface un réseau de courbes du genre zéro ou un.*

Nous désignerons par le cas D tous les cas où il y a un réseau de courbes de genre zéro ou un sur la surface.

II. Il nous reste à examiner le cas où nous avons un groupe de transformations à deux paramètres, α, β, donné par les expressions F, Φ, Ψ.

Je dis que dans ce cas le groupe sera permutable.

Les paramètres peuvent évidemment être tellement choisis que l'un soit h; nous écrirons donc le groupe

$$x' = F(x, y, z, h, \alpha),$$
$$y' = \Phi(x, y, z, h, \alpha),$$
$$z' = \Psi(x, y, z, h, \alpha),$$

et, d'après tout ce qui précède, x, y, z désignant une intégrale quelconque du système,

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y, z), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dt} = Z(x, y, z),$$

les formules précédentes donneront l'intégrale générale de ce système. La substitution infinitésimale, correspondant à la variation δh de h, sera

$$\delta x = X(x, y, z)\,\delta h, \qquad \delta y = Y(x, y, z)\,\delta h, \qquad \delta z = Z(x, y, z)\,\delta h.$$

Nous aurons donc établi que le groupe est permutable, si nous établissons le théorème suivant : *Étant donné le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y),$$

où X *et* Y *sont des fonctions quelconques de* x *et* y, *si ce système admet un groupe de transformations à deux paramètres*

$$x' = F(x, y, h, k),$$
$$y' = \Phi(x, y, h, k),$$

une des substitutions infinitésimales étant

$$(1) \qquad \delta x = X(x, y)\,\delta h, \qquad \delta y = Y(x, y)\,\delta h,$$

le groupe sera nécessairement permutable.

C'est ce qu'il est aisé d'établir comme il suit. Représentons par

$$(2) \qquad \delta x = X_1(x, y)\,\delta k, \qquad \delta y = Y_1(x, y)\,\delta k,$$

la seconde substitution infinitésimale; (1) et (2) formant un groupe, on a, d'après les principes de M. Lie,

$$(3) \qquad \begin{cases} X_1 \dfrac{\partial X}{\partial x} + Y_1 \dfrac{\partial X}{\partial y} - X \dfrac{\partial X_1}{\partial x} - Y \dfrac{\partial X_1}{\partial y} = \alpha X_1 + \beta X, \\ X_1 \dfrac{\partial Y}{\partial x} + Y_1 \dfrac{\partial Y}{\partial y} - X \dfrac{\partial Y_1}{\partial x} - Y \dfrac{\partial Y_1}{\partial y} = \alpha Y_1 + \beta Y, \end{cases}$$

α et β étant des constantes.

Mais nous devons écrire, d'autre part, que le système d'équations différentielles admet ce groupe. Nous devons donc avoir

$$\delta \frac{dx}{dt} = \frac{\partial X}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial X}{\partial y}\,\delta y.$$

Substituons aux δ leurs valeurs correspondant à la seconde substitution; il viendra

$$\delta k\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}X + \frac{\partial X_1}{\partial y}Y\right) = \frac{\partial X}{\partial x}X_1\,\delta k + \frac{\partial X}{\partial y}Y_1\,\delta k$$

ou

$$X_1\frac{\partial X}{\partial x} + Y_1\frac{\partial X}{\partial y} - X\frac{\partial X_1}{\partial x} - Y\frac{\partial X_1}{\partial y} = 0;$$

pareillement, la seconde équation donnerait

$$(4)\qquad X_1\frac{\partial Y}{\partial x} + Y_1\frac{\partial Y}{\partial y} - X\frac{\partial Y_1}{\partial x} - Y\frac{\partial Y_1}{\partial y} = 0.$$

Les équations (3) et (4) montrent que $\alpha = \beta = 0$, ce qui revient à dire, comme on sait, que le groupe est permutable.

Ainsi notre surface S *admet (sauf le cas* D*) un groupe permutable de transformations birationnelles.*

Nous sommes donc ramené à la conclusion du n° **6**.

Nous pouvons énoncer le théorème suivant, qui résume cet alinéa :

Si une surface algébrique S *admet un groupe fini de transformations birationnelles à un nombre quelconque de paramètres, deux cas peuvent se présenter :*

1° *Il y a sur la surface un faisceau de courbes algébriques du genre zéro ou un.*

2° *Les coordonnées d'un point quelconque de la surface peuvent s'exprimer par des fonctions uniformes de deux paramètres u et v, au moyen de l'inversion de deux intégrales de différentielles totales*

attachées à la surface, soit

$$\int^{x,y,z} P\,dx + Q\,dy = u,$$

$$\int^{x,y,z} P_1\,dx + Q_1\,dy = v,$$

les P *et* Q *étant rationnelles en* x, y, z.

Dans ce dernier cas, le genre de la surface sera nécessairement zéro ou un; dans le premier cas, le genre peut être quelconque. L'étude complète de ce premier cas a été faite dans l'alinéa précédent, en supposant que le genre de la surface soit supérieur à l'unité.

IV. — Surfaces rentrant dans la seconde catégorie; cas où les intégrales ont quatre périodes.

8. Nous allons nous occuper maintenant des surfaces de la seconde catégorie, c'est-à-dire des surfaces pour lesquelles il existe deux intégrales de différentielles totales

$$\int P\,dx + Q\,dy \qquad \text{et} \qquad \int P_1\,dx + Q_1\,dy,$$

telles que les équations

$$P\,dx + Q\,dy = du,$$
$$P_1\,dx + Q_1\,dy = dv,$$

donnent pour x, y et z des fonctions uniformes de u et v.

9. Nous rencontrons tout d'abord, comme surfaces de ce type, celles pour lesquelles les équations précédentes donnent x, y, z fonctions uniformes *quadruplement* périodiques de u et v. J'ai étudié ces surfaces dans un autre travail; je rappelle brièvement les résultats que j'ai obtenus et j'y ajoute quelques remarques qui me paraissent très importantes.

Tout d'abord la surface doit être du genre *un*.

Ensuite elle doit posséder deux intégrales de première espèce linéairement indépendantes, soit

$$\int \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} \quad \text{et} \quad \int \frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z}.$$

Soit de plus $R(x, y, z)$ la surface d'ordre $(m-4)$, *adjointe* à la surface f de degré m. Cette surface $R = 0$ coupe, en dehors des lignes multiples, la surface f suivant une certaine courbe Γ. J'ai ajouté aux conditions précédentes la condition que la courbe Γ soit unicursale, et que cette courbe satisfasse à l'équation différentielle

$$B\,dx - A\,dy = 0,$$

ce qui entraînera d'ailleurs immédiatement $B_1\,dx - A_1\,dy = 0$.

Or M. Nœther a fait la remarque que la courbe Γ est nécessairement unicursale, ce n'est même qu'un cas particulier d'une proposition donnée il y a longtemps par cet éminent géomètre, d'après laquelle une courbe « *ausgezeichnete* » tracée sur la surface, c'est-à-dire une courbe par laquelle passent *toutes* les adjointes d'ordre $(m-4)$, est nécessairement unicursale. Mais, dans le cas où le genre est un, il n'y a qu'une adjointe d'ordre $(m-4)$ et, par suite, la courbe Γ peut être considérée comme une courbe « *ausgezeichnete* ».

Une fois que l'on sait que la courbe Γ est unicursale, il est bien facile de voir qu'elle doit satisfaire à l'équation

$$B\,dx - A\,dy = 0.$$

Substituons, en effet, dans l'intégrale

$$\int \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z},$$

à la place de x, y et z, leurs expressions en fonctions rationnelles d'un paramètre, qui correspondent à la courbe Γ; il faudra que l'élément soit identiquement nul, sinon on aurait une intégrale de fraction rationnelle qui devrait toujours rester finie, ce qui est impossible.

Si la courbe Γ se compose de plusieurs courbes irréductibles, ces différentes courbes seront unicursales; nous les appellerons les courbes Γ.

Ainsi, les conditions nécessaires et suffisantes se réduisent aux deux conditions d'abord énoncées, et les équations

$$\int^{x,y,z} \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} = u, \qquad \int^{x,y,z} \frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z} = v,$$

donnent pour x, y, z des fonctions uniformes quadruplement périodiques de u et v.

Nous ajouterons que, quand (x, y, z) est située sur une courbe Γ, u et v ont, sur chacune de ces courbes, une valeur constante. Appelons (a, b) ces différents points qui sont manifestement des points d'indétermination pour les fonctions x, y, z de u et v.

Nous venons de dire que, si une surface était de genre un et possédait deux intégrales distinctes de première espèce, les deux équations

$$(1) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0, y_0, z_0}^{x,y,z} P\,dx + Q\,dy = u - u_0, \\ \displaystyle\int_{x_0, y_0, z_0}^{x,y,z} P_1\,dx + Q_1\,dy = v - v_0 \end{cases}$$

donnent pour x, y et z des fonctions uniformes de u et v.

En réalité, si l'on veut être entièrement rigoureux, ce n'est pas tout à fait ce résultat qui se trouve établi, mais cet autre dans l'énoncé duquel j'emploie une locution dont je ferai souvent usage dans le Chapitre V : x, y, z sont des fonctions de u et v *à apparence uniforme*.

Il est aisé de compléter la démonstration et de montrer que, sous les conditions indiquées, les équations (1) définissent des fonctions uniformes de u et v, pour tout l'ensemble des systèmes de valeurs finies de u et v.

Considérons, en effet, la surface

$$f(x, y, z) = 0$$

et en même temps le continuum fermé à quatre dimensions, que nous lui avons fait correspondre uniformément dans le second Chapitre ; et concevons tracées dans ce continuum les *coupures* à trois dimensions correspondant à la connexité du troisième ordre (ou du premier, ce

qui est identique). Quand (x, y, z) décrit la surface sans franchir les coupures, les variables u et v données par les équations (1) décrivent l'intérieur d'un certain *polyèdre* P_1 limité manifestement par des *faces* qui se correspondent respectivement par des substitutions de la forme

$$(u, v, u + \omega, v + \omega_1),$$

ω et ω_1 étant des périodes des intégrales. D'ailleurs, ce polyèdre peut, *a priori*, se recouvrir lui-même en totalité ou en partie.

Considérons maintenant un chemin C allant de (u_0, v_0) à un autre système quelconque de valeurs des variables (u_1, v_1). Le point (u_0, v_0) est à l'intérieur du polyèdre P; si le point (u_1, v_1) est à l'intérieur de ce même polyèdre, nous aurons en arrivant en (u_1, v_1) par le chemin indiqué une valeur déterminée pour (x, y, z). Si, au contraire, le point (u_1, v_1) est à l'extérieur de P, le chemin C sortira du polyèdre par une certaine *face*, et l'on construira le polyèdre limitrophe, et l'on continuera ainsi de suite. Arrivera-t-on certainement en (u_1, v_1) après avoir construit un nombre *fini* de polyèdres? C'est ce que l'on démontrera en raisonnant absolument comme M. Poincaré, dans son Mémoire sur les groupes fuchsiens, et même ici nous sommes dans des circonstances singulièrement plus faciles, pouvant raisonner sur la longueur de l'arc au sens habituel du mot, et toutes les substitutions à considérer étant nécessairement paraboliques.

Nous sommes donc assuré qu'en partant de (u_0, v_0) et allant, par un chemin déterminé, jusqu'en un point arbitraire (u_1, v_1), les fonctions (x, y, z) se trouvent déterminées; ou, en d'autres termes, *il n'y a certainement pas de limites au domaine des deux variables indépendantes u et v.*

Ce point acquis, la démonstration s'achève aisément. Deux chemins quelconques, partant de (u_0, v_0) pour aboutir en (u_1, v_1), doivent conduire à la même valeur; en effet, deux chemins infiniment voisins conduisent d'abord à la même valeur, puisqu'ils traversent la même suite de polyèdres, et, d'autre part, comme il n'existe par hypothèse aucun système de valeurs de u et v dans le voisinage duquel les fonctions cessent d'être uniformes, on ne pourra rencontrer pendant la déformation du chemin aucune ligne de ramification.

En définitive, x, y, z sont bien des fonctions uniformes de u et v dans tout le domaine des variables complexes illimitées u et v.

10. On sait former les intégrales de première espèce: nous pouvons donc supposer que nous avons les deux équations

$$\frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} = du,$$

$$\frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z} = dv,$$

dont on sait qu'elles donnent pour x, y et z des fonctions uniformes quadruplement périodiques de u et v.

x, y, z peuvent s'exprimer par des quotients *de fonctions entières de u et v*, que nous pouvons supposer réduites au même dénominateur

$$x = \frac{G_1(u, v)}{G(u, v)}, \qquad y = \frac{G_2(u, v)}{G(u, v)}, \qquad z = \frac{G_3(u, v)}{G(u, v)};$$

on pourra dire que l'intégration des équations précédentes est faite effectivement si l'on peut former les séries entières G, c'est-à-dire si l'on peut former un système d'équations différentielles permettant de calculer de proche en proche les coefficients de ces fonctions entières de u et v.

Nous nous appuierons sur ce théorème que les fonctions G peuvent être regardées comme appartenant à la classe des fonctions Θ de deux variables; je veux dire que pour un quelconque des systèmes de périodes ω et ω' on aura

$$G(u + \omega, v + \omega') = e^{au+bv+c}\,G(u, v),$$

a, b, c étant des constantes. Ce théorème n'est autre chose que le théorème jadis énoncé par Riemann, et dont nous avons, M. Poincaré et moi, donné une démonstration, il y a quelques années, que les fonctions quadruplement périodiques peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions Θ [1].

---

[1] *Comptes rendus*, deuxième semestre 1884.

Mais, avant de traiter la question précédente, il ne sera pas inutile d'appliquer la méthode dont je veux faire usage au cas beaucoup plus simple d'une courbe algébrique de genre un

$$f(x, y) = 0 \qquad (\text{degré } m).$$

Si $Q(x, y)$ est le polynôme adjoint d'ordre $m - 3$, l'équation donnant x en fonction doublement périodique d'un paramètre u sera

$$\frac{Q(x, y)\,dx}{f'_y} = du.$$

Montrons comment, en posant

$$x = \frac{G_1(u)}{G(u)},$$

G et G_1 étant des fonctions holomorphes de u dans tout le plan, appartenant à la classe des fonctions Θ, on pourra obtenir deux équations donnant G et G_1.

Si l'on pose

$$\frac{G'(u)}{G(u)} = \lambda(u),$$

on aura

$$\lambda(u + \omega) = \lambda(u) + a,$$
$$\lambda(u + \omega') = \lambda(u) + b,$$

ω et ω' étant les deux périodes, a et b deux constantes.

Donc $\lambda(u)$ sera une intégrale de seconde espèce de la courbe f. Or, ici, cette intégrale ne deviendra infinie que pour $x = \infty$; on aura donc

$$\lambda(u) = \int \frac{P(x, y)\,dx}{f'_y},$$

$P(x, y)$ étant un polynôme de degré $(m - 1)$. Il nous faut déterminer le polynôme P. Nous aurons d'abord $\frac{m(m-3)}{2}$ conditions exprimant que la courbe $P = 0$ passe par les points doubles de f, puis nous de-

vons écrire que dans

$$\frac{P(x, y)}{f'_y}$$

le développement suivant les puissances descendantes de x (pour x très grand) ne contient pas de terme en $\frac{1}{x}$, condition pour que l'intégrale $\lambda(u)$ soit de seconde espèce.

On aura ainsi $(m-1)$ conditions (non pas m, parce que, la somme des résidus devant être nulle, il suffit d'écrire la condition pour $m-1$ des branches à l'infini). De plus, la fonction $G(u)$ ou

$$e^{\int \lambda(u)\,du}, \text{ c'est-à-dire } e^{\int du \int \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} du},$$

est uniforme.

Or soit, pour une quelconque des branches de la courbe à l'infini, le développement pour x très grand

$$\int \frac{P(x, y)\,dx}{f'_y} = Ax + B + \frac{C}{x} + \ldots,$$

on aura

$$\int \lambda(u)\,du = \int \left(Ax + B + \frac{C}{x} + \ldots \right) du,$$

et cette intégrale doit, pour la valeur de u correspondant à $x = \infty$, avoir un résidu égal à l'unité.

Il suffit de prendre

$$A \int x\,du \qquad \text{ou} \qquad A \int \frac{Q(x, y)\,x\,dx}{f'_y},$$

dont le résidu, pour $x = \infty$, est de suite calculé, soit pour une des branches à l'infini

$$\frac{Q(x, y)\,x}{f'_y} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \ldots;$$

donc la partie devenant infinie dans $\int \lambda(u)\,du$ sera $A\alpha \log x$.

On devra par conséquent avoir $A\alpha = -1$, et l'on aura m relations

analogues. Nous avons donc en tout

$$\frac{m(m-3)}{2} + m - 1 + m \qquad \text{ou} \qquad \frac{m(m+1)}{2} - 1$$

équations pour déterminer le polynôme P d'ordre $m-1$. Or le nombre des coefficients entrant dans ce polynôme est $\frac{m(m+1)}{2}$; il restera donc une arbitraire, ce qui *a priori* devait être, puisque les polynômes G sont seulement déterminés à un facteur près de la forme $e^{\alpha u^2+\beta u+\gamma}$, et par suite $\lambda(u)$ à une expression additive près de la forme $2\alpha u + \beta$.

Nous connaissons donc le polynôme $P(x, y)$, et nous pouvons écrire

$$(1) \qquad \frac{d^2 \log G}{du^2} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

puisque l'on a

$$G(u) = e^{\int du \int \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} du}$$

L'équation (1) avec

$$\frac{dx}{du} = \frac{f'_y}{Q(x,y)}, \qquad \text{où} \qquad x = \frac{G_1}{G},$$

donne les *deux* équations auxquelles doivent satisfaire G et G_1 fonctions *entières* de u.

11. Nous allons voir que l'on peut suivre une voie analogue pour l'intégration des équations

$$\frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} = du, \qquad \frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z} = dv.$$

Il s'agit de former quatre équations pour avoir les fonctions G entières en u et v.

J'envisage la fonction $\log G(u, v)$; elle peut se mettre sous la forme

$$\int \lambda(u, v)\,du + \mu(u, v)\,dv,$$

λ et μ étant des fonctions uniformes de u et v.

En posant

$$\lambda = \frac{\frac{\partial G}{\partial u}}{G}, \qquad \mu = \frac{\frac{\partial G}{\partial v}}{G};$$

donc

$$\left.\begin{aligned} \lambda(u+\omega, v+\omega') &= \lambda(u,v) + a \\ \mu(u+\omega, v+\omega') &= \mu(u,v) + b \end{aligned}\right\} \quad (a,\ b \text{ étant des constantes}),$$

en désignant par (ω, ω') un système de périodes.

Par conséquent, λ et μ sont des intégrales de différentielles totales attachées à la surface $f(x, y, z) = 0$.

De plus, ce sont des intégrales de *seconde espèce*, car elles ne peuvent avoir aucun infini de nature logarithmique.

Pour quelles valeurs de (x, y, z) les intégrales de seconde espèce λ et μ deviendront-elles infinies? Ce sera évidemment pour les valeurs de (x, y, z) correspondant à

$$G(u, v) = 0;$$

or, pour toute valeur de u et v, satisfaisant à cette relation et différente des valeurs (a, b) d'indétermination (fin du n° **9**), une au moins des quantités x, y sera infinie; d'autre part, les valeurs (a, b) correspondent aux courbes Γ. Par conséquent, λ et μ ne deviendront infinies que quand le point (x, y, z) sera à l'infini ou sur une courbe Γ. On en conclut que

$$\lambda(u, v) = \int \frac{P\,dx + Q\,dy}{R^2 f_z},$$

$$\mu(u, v) = \int \frac{P_1\,dx + Q_1\,dy}{R^2 f_z},$$

les P et Q étant des polynômes en x, y, z; R ne figure qu'au carré au dénominateur, car les courbes Γ sont des courbes polaires *simples*.

Comme, d'autre part, en employant les coordonnées homogènes x, y, z, t, la *courbe* $t = 0$ est aussi une courbe polaire simple, on en conclut que P sera de degré $m + 2(m - 4)$ ou $3m - 8$ en x, y, z et de degré $3m - 9$ en x et z; pareillement Q sera de degré $3m - 8$, en x, y, z et de degré $3m - 9$ en y et z.

Nous chercherons donc les intégrales de seconde espèce linéairement

indépendantes; les degrés étant limités, il n'y aura nécessairement qu'un nombre limité de telles intégrales, et l'on devra pouvoir en trouver deux λ et μ, telles que

$$\lambda\, du + \mu\, dv$$

soit une différentielle exacte, ou encore

$$\lambda_1\, dx + \mu_1\, dy,$$

en posant

$$\lambda_1 = \frac{B\lambda - A\mu}{f'_z}, \qquad \mu_1 = \frac{B_1\lambda - A_1\mu}{f'_z}.$$

Il faut écrire maintenant que, dans

$$\int \lambda_1\, dx + \mu_1\, dy,$$

la période polaire correspondant à la courbe à l'infini $t = 0$ et aux courbes Γ est égale à $2\pi i$.

Tous ces calculs peuvent être effectués et l'on peut ainsi obtenir sous formes d'intégrales de différentielles totales les expressions $\lambda(u, v)$ et $\mu(u, v)$; écrivons donc

$$d \log G(u, v) = \lambda\, du + \mu\, dv,$$

et, par conséquent, on aura

$$\frac{\partial^2 \log G}{\partial u^2} = \varphi(G, G_1, G_2, G_3),$$

$$\frac{\partial^2 \log G}{\partial u\, \partial v} = \psi(G, G_1, G_2, G_3),$$

$$\frac{\partial^2 \log G}{\partial v^2} = \chi(G, G_1, G_2, G_3).$$

φ, ψ et χ étant des fonctions rationnelles *connues* de x, y, z ou, ce qui revient au même, des fonctions homogènes de degré zéro en G, G_1, G_2, G_3. D'ailleurs on tire des équations différentielles

$$\frac{\partial \log G_1}{\partial u} = \frac{\partial \log G}{\partial u} + A(G, G_1, G_2, G_3),$$

$$\frac{\partial \log G_1}{\partial v} = \frac{\partial \log G}{\partial v} + B(G, G_1, G_2, G_3).$$

A et B étant encore des fonctions rationnelles *connues*, analogues à φ, ψ, χ et deux autres équations analogues relatives à

$$\frac{\partial \log G_2}{\partial u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \log G_2}{\partial v}.$$

On aura ainsi un système d'équations, qui déterminent les fonctions G, G_1, G_2 et G_3, fonctions holomorphes de u et v pour toutes les valeurs finies de ces variables.

On voit donc, sans approfondir davantage la question, comment des deux équations initiales on pourra tirer des équations donnant les numérateurs et le dénominateur de x, y et z. Ainsi se trouve réalisée, par la considération des différentielles totales de seconde espèce, la formation de ces équations, que M. Weierstrass annonce sans détail avoir prises comme point de départ d'une de ses méthodes d'inversion, au moins dans le cas des intégrales hyperelliptiques (*Journal de Crelle*, t. 47, p. 297 : *Théorie des fonctions abéliennes*).

V. — Cas où les intégrales ont trois périodes.

12. Nous venons d'étudier les surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres. Mais les surfaces précédentes ne sont évidemment pas les seules rentrant dans la seconde catégorie, c'est-à-dire pour lesquelles on pourra par l'inversion de deux intégrales convenables

$$\int^{(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy = u$$

$$\int^{(x,y,z)} P_1\,dx + Q_1\,dy = v,$$

tirer x, y, z en fonctions uniformes de u et v.

C'est de ces dégénérescences que nous allons maintenant nous occuper. Le premier cas à examiner est celui où x, y, z, donnés par les équations précédentes, seraient des fonctions *triplement* périodiques de u et v.

On peut remarquer d'abord que la surface sera nécessairement

de genre zéro, car autrement on aurait une intégrale double

$$\int\int \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

restant toujours finie; or celle-ci peut s'écrire

$$\int\int F(u, v)\, du\, dv,$$

$F(u, v)$ étant une fonction uniforme, triplement périodique de u et v. Or une telle fonction ne peut être une fonction entière de u et v; l'intégrale ne peut donc rester toujours finie.

13. Avant d'aller plus loin, arrêtons-nous sur quelques surfaces particulières pour lesquelles les coordonnées x, y, z d'un point quelconque s'exprimeront, comme il vient d'être dit, par des fonctions triplement périodiques. Un premier exemple nous sera fourni par le système bien connu, considéré par Rosenhain; je le prends sous la forme que lui ont donnée Briot et Bouquet, dans leur *Théorie des fonctions elliptiques* (p. 501).

En posant

$$\Delta u = \sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)},$$

les deux équations

$$\frac{du}{\Delta u} + \frac{dv}{\Delta v} = dx,$$

$$\left[-\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{k^2\lambda(a)\lambda'(a)u^2}{1 - k^2\lambda^2(a)u^2}\right]\frac{du}{\Delta u} + \left[-\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{k^2\lambda(a)\lambda'(a)v^2}{1 - k^2\lambda^2(a)v^2}\right]\frac{dv}{\Delta v} = dy$$

définissent deux fonctions u et v de x et y, et les deux fonctions $u^2 + v^2$ et $u^2 v^2$ sont des fonctions *uniformes* de ces variables. Ces fonctions sont triplement périodiques, et l'on a le tableau suivant de périodes conjuguées :

Pour x.....	ω,	0,	ω'
Pour y.....	0,	πi,	$\frac{2\pi a i}{\omega}$

Les fonctions peuvent être obtenues à l'aide des fonctions θ d'une variable, elles sont de plus fractions rationnelles de e^{2y}.

Ces résultats rappelés, je poserai

$$u^2 = U, \qquad v^2 = V:$$

les équations précédentes deviennent, en remplaçant x et y par $\frac{x}{2}$ et $\frac{y}{2}$,

$$\frac{dU}{\sqrt{U(1-U)(1-k^2U)}} + \frac{dV}{\sqrt{V(1-V)(1-k^2V)}} = dx,$$

$$\left[-\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{k^2\lambda(a)\lambda'(a)U}{1-k^2\lambda^2(a)U}\right]\frac{dU}{\sqrt{U(1-U)(1-k^2U)}} + \ldots = dy.$$

qui donnent pour $U+V$ et UV des fonctions uniformes, triplement périodiques de x et y; le Tableau des périodes étant ici

$$\begin{matrix} 2\omega & 0 & 2\omega, \\ 0 & 2\pi i & \frac{4\pi a i}{\omega}, \end{matrix}$$

à un système de valeurs de

$$U, \quad \sqrt{U(1-U)(1-k^2U)}, \quad V, \quad \sqrt{V(1-V)(1-k^2V)}$$

ne correspondra qu'un *seul* système de valeurs de x et y, aux périodes près.

Considérons maintenant les équations

$$\begin{aligned} X &= U+V, \\ Y &= UV, \\ Z &= \sqrt{U(1-U)(1-k^2U)} + \sqrt{V(1-V)(1-k^2V)}; \end{aligned}$$

elles définissent une certaine surface $F(X, Y, Z) = 0$.

A un point arbitraire de cette surface correspond un système de valeurs de U et V, et des déterminations parfaitement déterminées des deux radicaux

$$\sqrt{U(1-U)(1-k^2U)}, \quad \sqrt{V(1-V)(1-k^2V)},$$

par conséquent, *à un point arbitraire de la surface* F *correspond*

un seul système de valeurs de x et y, aux périodes près. De plus X, Y, Z *sont des fonctions uniformes triplement périodiques de x et y.*

x et y s'expriment par des intégrales de différentielles totales; on a

$$\int P\,dX + Q\,dY = x,$$

$$\int P_1\,dX + Q_1\,dY = y,$$

les P et Q étant rationnelles en X, Y, Z. De plus, la première de ces intégrales sera de première espèce; ainsi la surface F *possède une intégrale de première espèce.*

Faisons $x = \text{const.}$, nous aurons sur la surface une famille de courbes; cette famille sera algébrique, car elle sera donnée par l'équation d'Euler

$$\frac{dU}{\sqrt{U(1-U)(1-k^2U)}} + \frac{dV}{\sqrt{V(1-V)(1-k^2V)}} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$(1)\qquad \frac{\sqrt{U(1-V)(1-k^2V)} + \sqrt{V(1-U)(1-k^2U)}}{1-k^2UV} = \text{const.}$$

Cette famille de courbes sera du genre zéro, puisque X, Y, Z sont des fonctions rationnelles de e^x.

En remplaçant dans (1) U et V par leurs valeurs en X, Y, Z, après avoir élevé au carré, on a de suite

$$(1)\qquad \frac{Z^2 + (1+k^2-k^2X)(X^2-\tfrac{1}{4}Y)}{(1-k^2Y)^2} = \text{const.} = \lambda.$$

Cherchons l'intersection du réseau de surfaces qui précède avec F. Ce réseau coupe F suivant une courbe qui a pour projection sur le plan des xy la courbe du quatrième degré

$$\lambda^2(1-k^2Y)^4 + 2\lambda(1-k^2Y)^2[(1+k^2)2Y - X - k^2XY] + (X^2-\tfrac{1}{4}Y)(1-k^2Y)^2 = 0;$$

d'où d'abord

$$1 - k^2 Y = 0,$$

et la conique variable avec λ

$$\lambda^2(1 - k^2 Y)^2 + 2\lambda[2(1 + k^2)Y - X - k^2 XY] + (X^2 - 4Y) = 0:$$

elle passe par le point $Y = 0$, $X = \lambda$.

Nous allons donc pouvoir exprimer X et Y en fonction rationnelle de λ et d'un paramètre θ; on aura donc certainement, pour la courbe cherchée,

$$X = P(\lambda, \theta),$$
$$Y = Q(\lambda, \theta),$$
$$Z = \sqrt{R(\lambda, \theta)},$$

P, Q et R étant rationnelles en λ et θ.

Mais on peut aller plus loin. Reprenons, en effet, la relation d'Euler, sous la forme

$$\frac{dU}{\sqrt{U(1-U)(1-k^2U)}} + \frac{dV}{\sqrt{V(1-V)(1-k^2V)}} = \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1-k^2\lambda)}},$$

où

$$\lambda = \left[\frac{\sqrt{U(1-V)(1-k^2V)} + \sqrt{V(1-U)(1-k^2U)}}{1 - k^2UV}\right]^2,$$

ou encore, comme il a été déjà écrit,

$$\lambda = \frac{Z^2 + (1 + k^2 - k^2X)(X^2 - 4Y)}{(1 - k^2Y)^2},$$

ce qui donne, par conséquent,

$$P\,dX + Q\,dY = \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1-k^2\lambda)}},$$

où λ a la valeur précédente, fonction rationnelle de X, Y et Z; et, par conséquent, $\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1-k^2\lambda)}$ sera aussi une fonction rationnelle de X, Y et Z.

On tire de là une conséquence intéressante. Le réseau (1) coupe la surface suivant une certaine courbe variable avec λ, qui doit se décomposer en deux courbes, et ces courbes correspondent aux deux déterminations du radical $\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1-k^2\lambda)}$; elles sont symétriques par rapport au plan des xy.

Donc on aura, pour les expressions de X, Y, Z en fonction de λ et θ,

$$X = P(\lambda, \theta),$$
$$Y = Q(\lambda, \theta),$$
$$Z = \sqrt{\lambda(1-\lambda)(1-k^2\lambda)}\, S(\lambda, \theta),$$

S étant, comme P et Q, rationnelle en λ et θ; et de tout ce qui précède il résulte que λ, $\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1-k^2\lambda)}$ et θ sont fonctions rationnelles de X, Y et Z.

Il y a donc sur la surface : 1° un réseau de courbes du genre zéro; 2° un réseau de courbes du genre un, correspondant à $\theta = \text{const}$.

14. Le type que nous venons d'examiner est manifestement une dégénérescence du cas général abélien; ayant

$$\Delta u = \sqrt{(u-a_1)(u-a_2)\ldots(u-a_6)},$$

les équations abéliennes sont

$$\frac{du}{\Delta u} + \frac{dv}{\Delta v} = dx,$$
$$\frac{u\,du}{\Delta u} + \frac{v\,dv}{\Delta v} = dy;$$

or, si l'on suppose que $a_5 = a_6 = b$, on a

$$\frac{du}{(u-b)\sqrt{(u-a_1)\ldots(u-a_4)}} + \frac{dv}{(v-b)\sqrt{(v-a_1)\ldots(v-a_4)}} = dx,$$
$$\frac{u\,du}{(u-b)\sqrt{(u-a_1)\ldots(u-a_4)}} + \frac{v\,dv}{(v-b)\sqrt{(v-a_1)\ldots(v-a_4)}} = dy.$$

C'est le cas étudié par Rosenhain, et qui nous a conduit à la classe précédente de surfaces.

Peut-on aller plus loin? Soit $a_3 = a_4 = c$; nous aurons le système

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{du}{(u-b)(u-c)\sqrt{(u-a_1)(u-a_2)}} + \frac{dv}{(v-b)(v-c)\sqrt{(v-a_1)(v-a_2)}} = dx, \\ &\frac{u\,du}{(u-b)(u-c)\sqrt{(u-a_1)(u-a_2)}} + \frac{v\,dv}{(v-b)(v-c)\sqrt{(v-a_1)(v-a_2)}} = dy, \end{aligned}\right.$$

qui donnent encore pour $u+v$ et uv des fonctions uniformes de x et y. Il y a seulement ici deux périodes, la période cyclique s'exprimant à l'aide des périodes polaires.

Nous trouvons donc, comme dégénérescence à trois périodes, le seul cas de Rosenhain.

15. Revenons maintenant d'une manière générale aux surfaces pour lesquelles les coordonnées s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres au moyen de l'inversion de différentielles totales. Soit

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int P\,dx + Q\,dy = u, \\ &\int P_1\,dx + Q_1\,dy = v, \end{aligned}\right\} \quad f(x, y, z) = 0, \quad \text{soit} \left\{\begin{aligned} x &= \lambda(u, v), \\ y &= \mu(u, v), \\ z &= \nu(u, v). \end{aligned}\right.$$

Il est évident, d'après tout ce qui a été dit précédemment, que

$$\lambda(u+h, v+k)$$

est une fonction rationnelle de

$$\lambda(u, v), \quad \mu(u, v), \quad \nu(u, v), \quad \lambda(h, k), \quad \mu(h, k), \quad \nu(h, k),$$

quels que soient u, v et h, k; pareillement pour μ et ν. Par suite, $\lambda(-u, -v)$ est fonction rationnelle de $\lambda(u, v)$, $\mu(u, v)$, $\nu(u, v)$.

Cela posé, supposons que les intégrales (1) aient trois couples de périodes :

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3,$$
$$U_1, \quad U_2, \quad U_3,$$

et supposons que, parmi ces périodes, se trouve au moins une période polaire, correspondant à une certaine courbe logarithmique C. Soit ω_2, U_2 ce couple de périodes. En effectuant sur u et v une substitution linéaire, on peut supposer que le Tableau précédent soit de la forme trouvée dans le paragraphe précédent :

$$\begin{array}{c|ccc} u & 2\omega & 0 & 2\omega'. \\ v & 0 & 2\pi i & \frac{4\pi a i}{\omega}. \end{array}$$

Ceci posé, je considère les deux équations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} P\,dx + Q\,dy &= \frac{dU}{\sqrt{U(1-U)(1-k^2U)}} + \frac{dV}{\sqrt{V(1-V)(1-k^2V)}}, \\ P_1\,dx + Q_1\,dy &= \left[-\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{k^2\lambda(a)\lambda'(a)U}{1-k^2\lambda^2(a)U}\right]\frac{dU}{\sqrt{U(1-U)(1-k^2U)}} \\ &\quad + \left[-\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \ldots\right]\frac{dV}{\sqrt{V(1-V)(1-k^2V)}}, \end{aligned}\right.$$

Elles donnent pour x, y, z des fonctions uniformes des coordonnées

$$X, Y, Z$$

de la surface $F(X, Y, Z)$ que nous venons d'étudier; et réciproquement X, Y, Z sont des fonctions uniformes de x, y, z. Tout cela est évident, *mais cette transformation, que nous pouvons appeler biuniforme, est-elle birationnelle?* Quand il s'agit d'une *courbe* algébrique, la réponse est toujours affirmative; *une transformation birationnelle est toujours biuniforme :* c'est un théorème que nous établirons dans une Note à la fin de ce Chapitre. Mais il en est tout autrement pour les *surfaces,* et l'on trouve aisément, pour le cas de deux variables, des transformations biuniformes qui ne soient pas birationnelles. Il suffira de citer la correspondance donnée par

$$x = Xe^{X^2}, \qquad y = XYe^{X^2},$$

d'où se tire

$$Y = \frac{y}{x}, \qquad X = xe^{-\frac{y^2}{x^2}};$$

la transformation est *biuniforme,* mais non *birationnelle.*

Étudions donc le système (2). V étant arbitraire, quand U tend vers $\frac{1}{k^2\lambda^2(a)}$, le radical ayant un signe convenable, la période polaire est pour v égale à $+2\pi i$. Donc, quand U tend vers $\frac{1}{k^2\lambda^2(a)}$, le radical ΔU ayant un certain signe, quels que soient d'ailleurs V et ΔV, (x, y, z) tendra vers un point de la courbe logarithmique C.

Supposons maintenant que U, après avoir décrit un lacet, revienne en $\frac{1}{k^2\lambda^2(a)}$ avec l'autre détermination de ΔU, *nous pouvons avoir à craindre* que ce système de U et ΔU corresponde à une singularité essentielle des fonctions x, y, z; nous allons montrer qu'il n'en est rien.

En désignant par I et I_1 les premières valeurs des intégrales en U qui figurent dans le second membre, et pareillement par J et J_1 les intégrales relatives à V, ces seconds membres, qui étaient primitivement

$$I + J \quad \text{et} \quad I_1 + J_1,$$

sont devenus

$$A - I + J, \quad A_1 - I_1 + J_1,$$

A et A_1 désignant deux constantes. Donc $\lambda(A - I + J)$ s'exprimera en fonction rationnelle de

$$\lambda(I + J, I_1 + J_1), \quad \mu(I + J, I_1 + J_1), \quad \nu(I + J, I_1 + J_1)$$

et de

$$\lambda(J, J_1), \quad \mu(J, J_1), \quad \nu(J, J_1);$$

par conséquent, pour les valeurs de x, y, z correspondant à la seconde détermination du radical, nous sommes ramenés aux valeurs de ces fonctions correspondant à la première détermination du radical. Il n'y avait pas de singularité essentielle dans le premier cas; *il n'y en aura donc pas dans le second.*

Il suit de là que x, y, z sont des fonctions rationnelles de X, Y, Z, et nécessairement alors X, Y, Z fonctions rationnelles de x, y, z, puisque la transformation est biuniforme.

Ainsi : *Dans le cas où les intégrales* (1) *ont trois périodes, et parmi celles-ci au moins une période polaire correspondant à une*

courbe logarithmique, on est assuré que la surface f correspond point par point à une surface rentrant dans le type F *étudié précédemment.*

On peut encore dire que, pour la surface f, les coordonnées peuvent s'exprimer en fonctions rationnelles de

$$\lambda, \quad \sqrt{a\lambda^4 + b\lambda^3 + c\lambda^2 + d\lambda + e}, \quad \theta,$$

λ et θ étant deux paramètres, et cela de telle manière, que θ, λ et le radical soient inversement des fonctions rationnelles de x, y, z. La surface F est un exemple d'une telle surface, mais il n'est pas difficile d'en trouver de bien plus simples.

16. Prenons en effet une surface du quatrième degré ayant deux droites doubles, ne se rencontrant pas. Elle satisfera aux conditions précédentes; soient en effet D et D_1 ces deux droites doubles.

Tout plan passant par D coupe la surface suivant une conique ayant un point double, c'est-à-dire suivant deux droites. Prenons un tétraèdre de référence dont les arêtes

$$x = 0, \qquad y = 0 \qquad \text{et} \qquad z = 0, \qquad t = 0$$

seront les droites doubles de la surface.

L'équation de celle-ci sera alors

$$Px^2 + Qxy + Ry^2 = 0,$$

P, Q et R étant homogènes et du second degré en z et t.

Faisant $t = 1$, nous aurons l'équation

$$\begin{aligned}&(Az^2 + Bz + C)x^2\\ &\quad + (A'z^2 + B'z + C')xy + (A''z^2 + B''z + C'')y^2 = 0.\end{aligned}$$

Soit

$$y = \lambda x;$$

la section sera formée de deux droites parallèles dont les équations seront de la forme

$$z = \varphi(\lambda, \sqrt{a\lambda^4 + b\lambda^3 + c\lambda^2 + d\lambda + e}),$$

φ étant rationnelle par rapport à λ et au radical; celui-ci porte sur un polynôme du quatrième degré, d'ailleurs arbitraire. Ainsi x, y, z se trouvent exprimés en fonctions rationnelles de x, λ et de la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré en λ.

Réciproquement, à un point arbitraire de la surface ne correspond qu'une valeur de λ et du radical.

Comment pourra-t-on reconnaître si une surface donnée

$$f(x, y, z) = 0$$

rentre dans la classe des surfaces précédentes?

Tout d'abord elle doit être du genre zéro, et doit avoir une intégrale de première espèce, soit

$$\int \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z},$$

que l'on pourra former. L'intégrale générale de l'équation

$$(1) \qquad B\,dx - A\,dy = 0$$

devra être algébrique; on sait d'ailleurs qu'elle sera de la forme

$$R(x, y, z) = \lambda,$$

R étant rationnelle. Il devra y avoir *deux courbes mobiles*, du genre zéro, d'intersection de ce faisceau avec la surface.

Il faudrait trouver R, c'est-à-dire savoir reconnaître si l'équation (1) admet une intégrale algébrique. Ici peut intervenir très utilement la considération des *cycles linéaires* de la surface.

Le nombre des cycles effectifs d'une surface dont les coordonnées s'expriment uniformément en fonctions rationnelles d'un paramètre θ, et en fonctions doublement périodiques d'un second paramètre u, est évidemment égal au nombre des cycles distincts dans le plan de la variable u, c'est-à-dire égal à *deux*. Réciproquement, si l'on a constaté que le nombre des cycles de la surface donnée est égal à deux, l'intégrale de première espèce aura seulement deux périodes, et alors l'équation (1) aura nécessairement son intégrale algébrique.

On peut encore recourir à une autre considération qui dispensera de faire l'étude des cycles linéaires. La surface doit avoir deux intégrales

distinctes de seconde espèce, et deux seulement. On cherchera donc les intégrales de seconde espèce de la surface proposée; s'il y en a *deux* distinctes, on sera assuré que la surface possède deux cycles linéaires effectifs, d'après le théorème démontré au Chapitre II, que le nombre des intégrales de seconde espèce est égal à celui de leurs périodes.

17. Nous avons précédemment supposé que, parmi les trois périodes, il y avait au moins une période polaire. On peut, *a priori*, se demander s'il ne pourrait arriver que les deux intégrales fussent de seconde espèce, en possédant toujours trois périodes.

Nous allons voir, par une marche indirecte, que cette circonstance ne peut se présenter.

Écrivons les deux équations

$$\int^{(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy = u,$$

$$\int^{(x,y,z)} P_1\,dx + Q_1\,dy = v.$$

Tout d'abord, quand (x, y, z) tendra vers un point d'une courbe irréductible C, pour laquelle u et v sont infinis, le rapport $\frac{u}{v}$ tendra vers une constante, indépendante de la position du point sur cette courbe. Si, en effet, $\frac{u}{v}$ variait avec la position du point (x, y, z) sur la courbe C, quand u et v augmenteraient indéfiniment, le rapport $\frac{u}{v}$ tendant vers une certaine limite d'ailleurs arbitraire, x, y, z tendraient vers des valeurs déterminées, et, par conséquent, x, y, z seraient des fonctions rationnelles de u et v: les intégrales n'auraient pas de périodes.

Cela dit, considérons un cas particulier d'inversion de deux intégrales de seconde espèce. Prenons, à cet effet, les deux équations

$$\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} + \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-k^2y)}} = du,$$

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} + \frac{y\,dy}{\sqrt{y(1-y)(1-k^2y)}} = dv.$$

Elles donnent pour $x+y$ et xy des fonctions uniformes de u et v.

Ceci nous conduit même à un résultat assez curieux; c'est que, en posant encore

$$X = x + y,$$
$$Y = xy,$$
$$Z = \sqrt{x(1-x)(1-k^2x)} + \sqrt{y(1-y)(1-k^2y)},$$

nous retombons encore sur notre surface

$$F(X, Y, Z) = 0$$

du n° **15**. On peut donc, pour cette surface, exprimer d'une tout autre manière que précédemment X, Y, Z par des fonctions uniformes de deux paramètres.

On conclut de ce qui précède que la surface F possède, outre l'intégrale de première espèce, une intégrale de seconde espèce non rationnelle en X, Y, Z.

Désignons ces deux intégrales par

$$\int R\,dX + S\,dY \quad \text{et} \quad \int R_1\,dX + S_1\,dY$$

et soient

$$\omega, \quad \omega',$$
$$\omega_1, \quad \omega'_1$$

leurs périodes.

Revenons maintenant aux deux intégrales de seconde espèce

$$u = \int P\,dx + Q\,dy,$$
$$v = \int P_1\,dx + Q_1\,dy,$$

intégrales ayant deux ou trois périodes.

Soit C une courbe pour laquelle u et v sont infinies, mais de telle manière nécessairement, comme nous l'avons dit, que le rapport $\frac{u}{v}$ soit

fixe, quel que soit le point de C. On voit de suite que les intégrales ne peuvent être que *simplement* infinies le long de C, dans l'hypothèse où les équations précédentes donnent x, y, z fonctions uniformes de u et v (j'entends par là que les points de rencontre de C avec un plan quelconque sont seulement des pôles simples pour l'intégrale ordinaire correspondante); de plus, $\frac{u}{v}$ restant constant le long de C, on pourra, par une combinaison linéaire convenable, faire en sorte que u reste fini pour la courbe C. Ensuite, en prenant k^2 convenablement, nous pouvons supposer que u a les périodes ω et ω', puis enfin, en effectuant encore une combinaison linéaire convenable, que v a pour périodes ω_1 et ω'_1.

Cela fait, nous considérons les équations

$$\int^{(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy = \int^{(X,Y,Z)} R\,dX + S\,dY,$$

$$\int^{(x,y,z)} P_1\,dx + Q_1\,dy = \int^{(X,Y,Z)} R_1\,dX + S_1\,dY.$$

x, y, z sont des fonctions *uniformes* de X, Y, Z; ceci est évident, mais il faut montrer que ce sont des fonctions rationnelles, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de singularités essentielles. Étudions ces équations sous la forme

$$\int^{(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy = \int \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}} + \int \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)(1-k^2\theta)}},$$

$$\int^{(x,y,z)} P_1\,dx + Q_1\,dy = \int \frac{t\,dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}} + \int \frac{\theta\,d\theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)(1-k^2\theta)}},$$

faisons tendre (x, y, z) vers un point de la courbe C, dont il a été parlé plus haut; u restera finie, v augmentera indéfiniment. Or, u restant finie et v augmentant indéfiniment, on a pour t et θ des quantités déterminées (à la symétrie près) dont l'une est infinie. Réciproquement donc, pour t infini et θ arbitraire, x, y, z ont des valeurs déterminées, et les lignes t infini, θ infini ne correspondent pas à des singularités essentielles.

Donc x, y, z sont des fonctions rationnelles de X, Y, Z.

On en conclut que X, Y, Z sont des fonctions algébriques de x, y et z. Par suite, les deux intégrales de seconde espèce, dont l'inversion se faisait par hypothèse d'une manière uniforme, et qui avaient soit *deux* ou *trois* couples de périodes ne peuvent en avoir que deux.

Donc le cas où l'on a deux intégrales ayant trois couples de périodes est complètement épuisé par l'unique cas étudié (nos **15** et suivants).

VI. — Cas où les intégrales ont moins de trois périodes.

18. La discussion des autres cas sera bien rapidement faite. Supposons d'abord que les deux intégrales soient de seconde espèce; c'est le cas que nous venons d'étudier au paragraphe précédent. Il rentre au fond dans le cas où l'on aurait trois périodes.

Nous pouvons donc supposer qu'il y ait au moins une période polaire. Comme type nous prendrons la dégénérescence signalée au n° **14**, et qui est plus complète encore que celle de Rosenhain.

Soit, pour

$$\int P\,dx + Q\,dy \quad \text{et} \quad \int P_1\,dx + Q_1\,dy,$$

o et ω cette période polaire.

Nous poserons

$$\int^{x,y,z} P\,dx + Q\,dy = \frac{\alpha\,du}{(u-c)\sqrt{(u-a_1)(u-a_2)}} + \frac{\alpha\,dv}{(v-c)\sqrt{(v-a_1)(v-a_2)}},$$

$$\int^{x,y,z} P_1\,dx + Q_1\,dy = \frac{\beta\,du}{(u-b)\sqrt{(u-a_1)(u-a_2)}} + \frac{\beta\,dv}{(v-b)\sqrt{(v-a_1)(v-a_2)}};$$

on peut supposer que les périodes polaires correspondant à $u = b$, dans le second membre, sont

$$o \quad \text{et} \quad \omega;$$

on peut supposer ensuite, en prenant encore convenablement α et β, que la seconde période du second membre, pour $v = c$, coïncide avec

le second système de périodes de l'intégrale. Dans ces conditions, x, y, z sont des fonctions uniformes de $u+v$ et uv. On montrera, en suivant un mode de raisonnement déjà fait, que le point $u=b$, quel que soit le signe du radical, n'est pas un point singulier essentiel.

Que se passe-t-il pour $u=c$, v étant arbitraire? S'il y a une seconde courbe logarithmique, correspondant au second système de périodes, il n'y aura aucune difficulté, et il n'y aura pas de singularités essentielles dans la correspondance biuniforme. Le seul cas qui puisse arrêter est celui où il y aurait une courbe rendant infinies (non d'une manière logarithmique) les deux intégrales; nous avons dit que, dans ce cas, le rapport des intégrales doit être constant pour les points de cette courbe; par conséquent, en faisant une combinaison convenable, nous aurons une des intégrales restant finie. Considérons donc

$$\int^{(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy = U,$$

$$\int^{(x,y,z)} P_1\,dx + Q_1\,dy = V,$$

U restant fini pour les points d'une certaine courbe C, qui donnent $V=\infty$. Il est immédiat que x, y, z ne peuvent être que des fonctions rationnelles de V, puisque, pour U fini, on a x, y, z fonctions uniformes de V et parfaitement déterminées pour V infini. Considérons maintenant une certaine courbe logarithmique Γ; une combinaison linéaire de ces deux intégrales n'aura pas de période polaire : il est impossible que cette combinaison se réduise à U, car alors on aurait une fonction rationnelle de V qui serait périodique. Soit donc V, comme nous pouvons le supposer, cette combinaison; x, y, z sont, par suite, des fonctions rationnelles de V, les coefficients étant des fonctions de U ayant une certaine période. Il n'y a pas, par hypothèse, d'autres courbes logarithmiques, ou du moins, s'il y en a, elles donnent au signe près la même période polaire que celle que nous venons d'envisager, et pour toutes celles-ci U sera finie comme pour Γ. En dehors de ces courbes, il peut y en avoir d'autres analogues à la courbe C, pour lesquelles U et V soient infinies; il y aura, comme nous l'avons déjà dit plusieurs fois, une combinaison des intégrales qui restera finie; si cette

combinaison est différente de U, on en conclura que x, y, z sont fonctions rationnelles de U et V; si elle coïncide avec U, il en résultera que U deviendra infinie seulement pour la courbe logarithmique Γ et ses analogues : donc x, y, z sera fonction rationnelle de e^{au} et V, a étant une constante convenable; nous avons donc seulement alors une seule période.

Nous avons ainsi examiné toutes les hypothèses qui peuvent se présenter quand l'inversion des deux intégrales doit donner des fonctions uniformes.

19. Nous avons énoncé (n° **15**) que, dans le cas des courbes algébriques, *toute transformation biuniforme était nécessairement birationnelle*. On peut l'établir de la manière suivante :

Soient deux courbes algébriques

$$f(x, y) = 0, \qquad F(X, Y) = 0.$$

Il existe, par hypothèse, entre (x, y) et (X, Y), une transformation biuniforme n'ayant d'autres singularités possibles que des points essentiels *isolés;* il faut montrer que, dans cette hypothèse, la transformation est birationnelle.

Soit $x = a$, $y = b$ un point singulier essentiel de la transformation; on peut toujours supposer que ce point est un point simple de la courbe algébrique.

Dans ces conditions, X et Y seront des fonctions uniformes de x dans le voisinage de $x = a$, ce point étant un point singulier essentiel de ces fonctions; soit

$$X = \varphi(x), \qquad Y = \psi(x).$$

A une valeur de X correspond dans le voisinage de $x = a$ une *infinité* de racines de l'équation

$$X = \varphi(x),$$

d'après un théorème que j'ai démontré autrefois; pour ces racines, la fonction $\psi(x)$ ne pourra avoir qu'un nombre limité de valeurs, celles qui satisfont à l'équation

$$F(X, Y) = 0;$$

donc à un point arbitraire (X, Y) de la courbe F se trouve correspondre une infinité de points (x, y) de la première dans le voisinage de $x = a, y = b$; la substitution ne serait donc pas biuniforme. Le théorème est par suite établi.

CHAPITRE IV.

CORRESPONDANCE ENTRE DEUX SURFACES.

I. — Surfaces de genre supérieur à un, admettant une série infinie discontinue de substitutions birationnelles.

1. Nous avons considéré le cas d'une substitution birationnelle renfermant un paramètre arbitraire. Des surfaces peuvent-elles se transformer en elles-mêmes au moyen d'une infinité de substitutions birationnelles qui ne dépendent pas nécessairement d'un paramètre arbitraire? C'est la question à laquelle nous allons répondre en supposant le genre de la surface supérieur à l'unité.

Considérons la surface d'ordre m

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

de genre p, et soit

$$A_1 Q_1(x, y, z) + A_2 Q_2(x, y, z) + \ldots + A_p Q_p(x, y, z)$$

le polynôme adjoint d'ordre $(m - 4)$ avec ses p constantes arbitraires $A_1, A_2, \ldots, A_p$. J'envisage la surface

$$A_1 Q_1(x, y, z) + A_2 Q_2(x, y, z) + \ldots + A_p Q_p(x, y, z) = 0. \tag{2}$$

A quelle condition cette surface sera-t-elle tangente à la surface $f = 0$?

En écrivant qu'en un point (x, y, z), commun aux surfaces (1) et (2), les deux surfaces sont tangentes, on obtient deux équations. En éliminant x, y, z entre ces deux équations et les équations (1) et (2), on obtiendra la condition

$$\lambda(A_1, A_2, \ldots, A_p) = 0,$$

λ étant un polynôme homogène en $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Ceci exprime, bien entendu, la condition pour que la surface (2) soit tangente à la surface f, en un point (x, y, z), situé en dehors des lignes ou des points multiples de cette surface. Les coordonnées (x, y, z) du point de contact seront des fonctions rationnelles de $A_1, A_2, \ldots, A_p$.

$$x = R_1(A_1, A_2, \ldots, A_p),$$
$$y = R_2(A_1, A_2, \ldots, A_p),$$
$$z = R_3(A_1, A_2, \ldots, A_p).$$

Effectuons sur f une substitution birationnelle la transformant en elle-même; la surface (2) deviendra évidemment

$$A'_1 Q_1 + A'_2 Q_2 + \ldots + A'_p Q_p = 0,$$

les A' étant des fonctions linéaires homogènes des A, et l'on aura

$$\lambda(A'_1, A'_2, \ldots, A'_p) = 0.$$

Par suite, à toute substitution f transformant la surface en elle-même correspond une substitution linéaire Σ effectuée sur les A et pour laquelle

$$\lambda(A_1, A_2, \ldots, A_p)$$

se reproduit à un facteur près. Inversement, considérons une substitution Σ effectuée sur les A et pour laquelle la forme se reproduit à un facteur près; nous avons d'une part

$$x = R_1(A_1, A_2, \ldots, A_p),$$
$$y = R_2(A_1, A_2, \ldots, A_p),$$
$$z = R_3(A_1, A_2, \ldots, A_p),$$

et soit, d'autre part,

$$x' = R_1(A'_1, A'_2, \ldots, A'_p),$$
$$y' = R_2(A'_1, A'_2, \ldots, A'_p),$$
$$z' = R_3(A'_1, A'_2, \ldots, A'_p).$$

Soit p supérieur ou égal à quatre; considérons les équations

$$\Sigma A_i Q_i(x, y, z) = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{\Sigma A_i \dfrac{\partial Q_i}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\Sigma A_i \dfrac{\partial Q_i}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\Sigma A_i \dfrac{\partial Q_i}{\partial z}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}};$$

faisons, pour fixer les idées, $A_5 = A_6 = \ldots = A_p = 0$; ces équations nous donnent pour A_1, A_2, A_3, A_4 des fonctions rationnelles de x, y, z; les A', qui sont des fonctions linéaires des A, sont alors des fonctions rationnelles de x, y, z, et, par suite, x', y', z' deviennent des fonctions rationnelles de x, y, z.

D'autre part, la substitution considérée permettra d'exprimer quatre des A' au moyen de A_1, A_2, A_3, A_4; et par suite, $p - 4$ des A' au moyen des quatre autres que nous désignerons par A'_1, A'_2, A'_3, A'_4. On a d'ailleurs

$$\Sigma A'_i Q_i(x', y' z') = 0$$

$$(3') \qquad \frac{\Sigma A'_i \dfrac{\partial Q_i}{\partial x'}}{\dfrac{\partial f}{\partial x'}} = \frac{\Sigma A_i \dfrac{\partial Q_i}{\partial y'}}{\dfrac{\partial f}{\partial y'}} = \frac{\Sigma A'_i \dfrac{\partial Q_i}{\partial z'}}{\dfrac{\partial f}{\partial z'}},$$

et ces équations nous donneront pour A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, et, par suite, pour tous les A' et, enfin, pour les A des fonctions rationnelles de x', y', z'. Nous voyons donc que x, y, z sont aussi fonctions rationnelles de x', y', z'.

Ainsi, à toute substitution linéaire Σ effectuée sur les A et laissant invariable l'équation

$$\lambda(A_1, A_2, \ldots, A_p) = 0$$

correspond une substitution birationnelle de la surface en elle-même. Cette substitution ne sera pas nécessairement unique; nous aurions pu

donner à $A_5, \ldots, A_p$ des valeurs arbitraires, mais, et c'est là un point essentiel pour la suite, si les substitutions S correspondant à une substitution Σ sont en nombre infini, elles renferment nécessairement au moins un paramètre arbitraire.

Ceci posé, supposons que la surface f puisse être transformée en elle-même par une infinité de substitutions birationnelles. A chacune de ces substitutions S correspond une substitution linéaire Σ pour l'équation

$$\lambda(A_1, A_2, \ldots, A_p) = 0.$$

Nous supposons les substitutions S en nombre infini; soient d'abord les substitutions Σ en nombre fini. Alors, d'après ce que nous venons de dire, les substitutions S renferment au moins un paramètre arbitraire; nous sommes donc dans un des cas examinés précédemment : la surface du genre zéro ou du genre un, si le nombre des paramètres est supérieur à un, et, si, le genre étant supérieur à un, il y a un paramètre arbitraire, la surface fera partie de la famille étudiée plus haut.

Si les substitutions Σ sont en nombre infini, elles dépendront nécessairement d'un paramètre arbitraire; car, si l'on cherche les substitutions linéaires Σ transformant en elle-même l'équation

$$\lambda(A_1, A_2, \ldots, A_p) = 0,$$

on aura un certain nombre d'équations algébriques, et si ces équations ne déterminent pas les rapports des coefficients des substitutions Σ, il restera nécessairement dans celles-ci un ou plusieurs paramètres arbitraires; les substitutions S renferment alors au moins un paramètre arbitraire et nous retombons dans le cas précédent.

2. La démonstration précédente suppose que $p \geqq 4$. Une démonstration toute semblable, quant au principe, pourra s'appliquer non seulement à ces cas, mais comprendra aussi le cas de $p = 3$. Considérons à cet effet les deux équations

$$A_1 Q_1(x, y, z) + A_2 Q_2(x, y, z) + \ldots + A_p Q_p(x, y, z) = 0,$$
$$B_1 Q_1(x, y, z) + B_2 Q_2(x, y, z) + \ldots + B_p Q_p(x, y, z) = 0;$$

ces deux surfaces ont une courbe mobile d'intersection.

Nous chercherons la condition pour que cette courbe soit tangente à la surface; nous obtenons ainsi une équation de la forme

$$\lambda(A_1B_2 - A_2B_1, \ldots) = 0.$$

λ étant un polynôme homogène en $A_iB_k - A_kB_i$. Quant aux coordonnées (x, y, z) du point de contact, ce seront des fonctions rationnelles et homogènes de degré zéro par rapport aux A et par rapport aux B. Ceci posé, rien n'est à changer à la démonstration précédente; à une substitution S correspond une substitution Σ effectuée simultanément sur A et B; on considérera ensuite les substitutions Σ effectuées simultanément sur A et B, et laissant invariable l'équation $\lambda = 0$. La correspondance entre les substitutions S et Σ, établie comme plus haut, nous conduira à la même conclusion.

Il nous reste à examiner le cas de $p = 2$, auquel ne s'appliquent pas les démonstrations précédentes. Soit

$$(1) \qquad A_1Q_1(x, y, z) + A_2Q_2(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface adjointe d'ordre $m - 4$. Il résulte d'une proposition plus générale de M. Nœther (*Math. Annalen*, t. VIII, p. 524), que la partie mobile de l'intersection se composera d'une courbe irréductible de genre un.

Une substitution transformant la surface en elle-même transformera (1) en

$$(2) \qquad B_1Q_1 + B_2Q_2 = 0,$$

B_1 et B_2 étant des fonctions linéaires de A_1 et A_2. Soit C_α la courbe (1) et soit C_β la courbe (2). Si nous cherchons à quelle condition les deux courbes de genre un, C_α et C_β, se correspondent point par point, ou bien nous aurons une relation algébrique entre

$$\frac{A_1}{A_2} \quad \text{et} \quad \frac{B_1}{B_2},$$

ou bien toutes les courbes auront même module, et alors deux quelconques se correspondront point par point.

Que l'on soit dans l'un ou l'autre cas, soient C_α et C_β deux courbes se correspondant; on aura, pour la transformation de la première en la seconde,

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= \varphi\left(x, y, z, \frac{A_1}{A_2}, \frac{B_1}{B_2}, \theta\right),\\ y' &= \varphi_1\left(x, y, z, \frac{A_1}{A_2}, \frac{B_1}{B_2}, \theta\right),\\ z' &= \varphi_2\left(x, y, z, \frac{A_1}{A_2}, \frac{B_1}{B_2}, \theta\right),\end{aligned}\right.$$

les φ étant rationnelles en x, y, z et algébriques en $\frac{A_1}{A_2}$ et $\frac{B_1}{B_2}$, avec le paramètre θ que l'on peut supposer entrer algébriquement.

Si donc on remplace $\frac{A_1}{A_2}$ par $-\frac{Q_2(x, y, z)}{Q_1(x, y, z)}$ et $\frac{B_1}{B_2}$ par $-\frac{Q_2(x', y', z')}{Q_1(x', y', z')}$, toutes les transformations de la surface en elle-même devront rentrer dans le type (α), où figure l'arbitraire θ. Il devra donc arriver que, pour un nombre infini de valeurs de θ, les équations (α) donneront une substitution birationnelle. Or ceci est impossible; car, θ entrant algébriquement, pour exprimer que x', y', z' données par les relations (α) sont fonctions rationnelles de (x, y, z), on n'a à écrire que des conditions qui s'expriment algébriquement. Si donc les équations (α) donnent une substitution birationnelle pour une *infinité* de valeurs de θ, il devra en être ainsi quel que soit θ, et l'on rentrera alors dans les surfaces étudiées précédemment.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Les seules surfaces de genre supérieur à un admettant une infinité de transformations birationnelles sont celles qui admettent une suite continue de transformations avec un paramètre arbitraire, et dont nous avons précédemment fait l'étude.

II. — Sur la correspondance point par point de deux surfaces données.

3. Étant données deux surfaces f et F, de genre au moins égal à deux, il est facile de reconnaître si ces surfaces se correspondent point

par point; c'est une question qui peut se traiter de diverses manières.

Avant de nous occuper des surfaces, reprenons d'abord la même question pour les courbes algébriques. Supposons que le genre p des courbes soit supérieur à deux; nous prendrons alors, sur la courbe f, $(p-2)$ points arbitraires

$$(x_1, y_1), \quad \ldots, \quad (x_{p-2}, y_{p-2}),$$

et nous considérerons le faisceau des adjointes d'ordre $m-3$ (m étant le degré de f) passant par ces points. Soit

$$A_1 Q_1 + A_2 Q_2 = 0$$

ce faisceau avec le paramètre arbitraire $\frac{A_2}{A_1}$, les coefficients de Q_1 et Q_2 dépendant, bien entendu, de $(x_1, y_1), \ldots, (x_{p-2}, y_{p-2})$. Considérons alors, avec Brill et Nœther dans leur Mémoire, devenu classique, sur les courbes algébriques (*Math. Annalen*, t. VII), l'équation

$$(1) \qquad \varphi(A_1, A_2) = 0,$$

donnant les courbes de ce faisceau tangentes à f; son degré bien connu est égal à $4p-2$.

Soit maintenant la courbe F que l'on suppose correspondre point par point à la première; soient $(x'_1, y'_1), \ldots, (x'_{p-2}, y'_{p-2})$ les points correspondants aux points de la première $(x, y), \ldots, (x_{p-2}, y_{p-2})$. On aura le réseau

$$B_1 Q'_1 + B_2 Q'_2 = 0,$$

et l'équation correspondante de contact

$$(2) \qquad \Phi(B_1, B_2) = 0.$$

Les équations (1) *et* (2) *peuvent être transformées l'une dans l'autre par une substitution linéaire convenable effectuée sur* B_1 *et* B_2.

Tel est, en changeant seulement la forme, le point de départ de MM. Brill et Nœther dans l'étude si importante des modules des courbes algébriques.

Je dis que nous pouvons en tirer la réponse à la question posée relativement à la correspondance des deux courbes f et F.

En effet, les deux formes binaires (1) et (2) étant équivalentes, nous pouvons égaler leurs $(4p-5)$ invariants absolus. Ceux-ci sont évidemment des fonctions rationnelles de $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{p-2}, y_{p-2})$ pour la première forme, et pareillement de $(x'_1, y'_1), \ldots$ pour la seconde.

Nous pouvons donc écrire $4p-5$ équations, parfaitement déterminées, de la forme

$$(\mathrm{E}) \qquad i(x_1, y_1, \ldots, x_{p-2}, y_{p-2}) = \mathrm{I}(x'_1, y'_1, \ldots, x'_{p-2}, y'_{p-2}).$$

Nous pouvons même encore obtenir une autre relation entre les (x, y) et les (x', y').

En effet, quand les équations (E) sont vérifiées, les deux formes Φ et φ pourront se transformer l'une dans l'autre, et cela, en général, d'une seule manière. On aura donc la substitution

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_1 &= \alpha \mathrm{B}_1 + \beta \mathrm{B}_2, \\ \mathrm{A}_2 &= \gamma \mathrm{B}_1 + \delta \mathrm{B}_2, \end{aligned}$$

les α, β, γ, δ étant des fonctions rationnelles des (x, y) et des (x', y').

Ainsi se trouvera déterminée la substitution linéaire qui fait correspondre une courbe quelconque du faisceau des adjointes de f passant par les (x, y) à une courbe du faisceau des adjointes de F passant par les (x', y'). Or considérons dans le premier faisceau la courbe tangente à f en (x_1, y_1); son équation sera parfaitement déterminée. D'autre part, dans le second faisceau la courbe tangente en (x'_1, y'_1) sera de même déterminée. A la première courbe correspond une valeur de $\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_2}$ et à la seconde une valeur de $\frac{\mathrm{B}_1}{\mathrm{B}_2}$. En écrivant que

$$\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_2} = \frac{\alpha \mathrm{B}_1 + \beta \mathrm{B}_2}{\gamma \mathrm{B}_1 + \delta \mathrm{B}_2},$$

nous obtenons une nouvelle équation, qui est symétrique en $(x_2, y_2), \ldots, (x_{p-2}, y_{p-2})$ d'une part et en $(x'_2, y'_2), \ldots, (x'_{p-2}, y'_{p-2})$

d'autre part, mais où (x_1, y_1) et (x'_1, y'_1) jouent un rôle à part. Appelons cette équation (d); on pourra la mettre sous la forme

$$(d) \qquad \delta(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{p-2}, y_{p-2}) = \Delta(x'_1, y'_1, \ldots, x'_{p-2}, y'_{p-2}).$$

4. En partant de p adjointes arbitraires dans l'une et l'autre courbe, nous pouvons former les équations (E) et l'équation (d). En se donnant arbitrairement $(x_1, y_1), \ldots, (x_{p-2}, y_{p-2})$, on doit pouvoir déduire de ces équations les valeurs des (x', y'). Pratiquement on opérera de la manière suivante : on supposera, comme il est évidemment permis, les $p-2$ points (x, y) confondus et pareillement alors les $p-2$ points (x', y'). On aura alors à la place des équations (E) et (d) un système d'équations entre (x_1, y_1) et (x'_1, y'_1); et ces équations devront donner (x'_1, y'_1) en fonctions rationnelles de (x_1, y_1) et inversement.

On a donc là une méthode régulière pour reconnaître si deux courbes se correspondent point par point, et pour trouver la substitution birationnelle quand elle existe.

Remarquons incidemment que des dernières équations se tire de suite la démonstration de ce théorème qu'une courbe $(p > 2)$ ne peut admettre une infinité, continue ou discontinue, de transformations, puisque le nombre des transformations tirées de ces équations ne peut être que limité.

5. Revenons maintenant aux surfaces algébriques, et cherchons de quelle manière les considérations précédentes peuvent être étendues aux surfaces algébriques.

Prenons sur la surface $(p-1)$ points

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \quad \ldots, \quad (x_{p-3}, y_{p-3}, z_{p-3}).$$

Le réseau des surfaces adjointes passant par ces points contient deux arbitraires; soient Q_1, Q_2, Q_3 trois polynômes adjoints, linéairement indépendants, s'annulant pour ces $(p-3)$ points. Désignons, d'une manière générale, par *courbe* C une courbe (mobile) intersection de deux surfaces adjointes. Il y a une infinité de courbes C passant par les

$(p-3)$ points considérés; leurs équations peuvent s'écrire

$$\frac{Q_1(x,y,z)}{\lambda} = \frac{Q_2(x,y,z)}{\mu} = \frac{Q_3(x,y,z)}{\nu},$$

λ, μ, ν étant arbitraires. Parmi ces courbes C, il y en a une infinité qui sont tangentes à la surface, et la condition pour qu'il en soit ainsi s'exprimera par une équation

$$P(\lambda,\mu,\nu) = 0,$$

P étant un polyôme homogène en λ, μ, ν et irréductible. Nous ne comprenons pas dans P les $p-3$ expressions linéaires en λ, μ, ν correspondant aux courbes C tangentes en $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_{p-3}, y_{p-3}, z_{p-3})$, ni les relations entre λ, μ, ν correspondant aux courbes C rencontrant les lignes multiples de la surface.

Le degré a du polynôme P est un *invariant*, puisque, quand on passe d'une surface à une autre qui lui correspond point par point, les polynômes Q se transforment linéairement. A cet invariant, nous pouvons en associer deux autres; si l'on considère l'équation P comme représentant une courbe en coordonnées homogènes, ou un cône, cette courbe aura

δ points doubles,

$\varkappa$ points de rebroussement.

Ces nombres sont des invariants, car un point double correspondra à une courbe C tangente deux fois à la surface, et un point de rebroussement à une courbe C ayant avec la surface un contact de second ordre et le nombre de ces courbes est manifestement le même pour deux surfaces se correspondant point par point.

Soit maintenant une seconde surface algébrique correspondant point par point à la première. Si on considère les points

$$(x'_1, y'_1, z'_1), \ldots, (x'_{p-3}, y'_{p-3}, z'_{p-3})$$

correspondant à $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_{p-3}, y_{p-3}, z_{p-3})$, on aura une équation

$$P_1(\lambda', \mu', \nu') = 0.$$

Les deux courbes (si l'on veut employer le langage de la Géométrie plane)

$$P(\lambda, \mu, \nu) = 0,$$
$$P_1(\lambda', \mu', \nu') = 0$$

seront de même ordre a et auront δ points doubles et $\varkappa$ points de rebroussement.

On doit pouvoir passer de l'une à l'autre par une substitution homographique.

On pourra donc écrire un certain nombre de conditions, revenant à l'égalité de certains invariants pour l'une et l'autre courbe, qui seront par conséquent de la forme

$$(E) \qquad \left\{ \begin{aligned} & I(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_{p-3}, y_{p-3}, z_{p-3}) \\ & \quad = I(x'_1, y'_1, z'_1, \ldots, x'_{p-3}, y'_{p-3}, z'_{p-3}). \end{aligned} \right.$$

Nous pouvons encore obtenir deux autres relations entre les (x, y, z) et les (x', y', z').

A cet effet, considérons l'un des points, soit (x_1, y_1, z_1). Il y a une infinité de courbes C tangentes à la surface en (x_1, y_1, z_1) et la relation λ, μ, ν est évidemment linéaire, soit

$$(1) \qquad A\lambda + B\mu + C\nu = 0,$$

et pareillement en (x'_1, y'_1, z'_1), nous aurons pour l'autre surface

$$(2) \qquad A_1\lambda' + B_1\mu' + C_1\nu' = 0.$$

La substitution linéaire qui transforme la courbe P en la courbe P_1 devra transformer l'équation (1) en l'équation (2), et, comme ce fait s'exprimera toujours en écrivant l'égalité d'invariants communs aux deux couples de formes, on aura deux nouvelles relations de la forme

$$(d) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \delta(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_{p-3}, y_{p-3}, z_{p-3}) \\ & \quad = \Delta(x'_1, y'_1, z'_1, \ldots, x'_{p-3}, y'_{p-3}, z'_{p-3}). \end{aligned} \right.$$

δ et Δ étant rationnelles et symétriques par rapport aux indices $2, 3, \ldots p-3$; mais (x_1, y_1, z_1) et (x'_1, y'_1, z'_1) jouant un rôle à part.

En partant de p points arbitraires dans deux surfaces données, on pourra former les équations (E) et (d). En se donnant arbitrairement les (x, y, z), on doit pouvoir déduire de ces équations les (x', y', z'), si les surfaces se correspondent point par point.

Ceci entraînera manifestement un certain nombre de conditions. Quand elles seront remplies, on pourra, *en général*, tirer de ces équations des valeurs pour les (x', y', z'); ainsi l'on pourra éliminer

$$(x'_2, y'_2, z'_2), \ldots, (x'_{p-3}, y'_{p-3}, z'_{p-3})$$

et avoir des équations où ne figure plus que (x'_1, y'_1, z'_1). On aura donc à voir si (x'_1, y'_1, z'_1) ainsi déterminés sont fonctions rationnelles de (x_1, y_1, z_1), point sur lequel il n'y a pas d'indications générales à donner, mais qui dans la pratique ne présentera pas de difficultés.

Ainsi donc, en général, on pourra reconnaître la correspondance des deux surfaces et trouver la substitution exprimant cette correspondance.

Nous disons, en général : quel pourrait être le cas d'exception où la marche suivie serait impuissante à conduire au résultat? Ce serait le cas où des équations (d) et (E) on ne pourrait tirer, après l'élimination de $(x'_2, y'_2, z'_2), \ldots, (x'_{p-3}, y'_{p-3}, z'_{p-3})$, qu'une seule équation pour trouver (x'_1, y'_1, z'_1). Dans ce cas tout spécial, nous aurons recours à une autre méthode, que nous allons exposer, méthode plus générale même que la précédente, puisqu'elle s'applique encore au cas où $p = 3$.

6. Soient $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ et $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_p$ les p polynômes adjoints pour l'une et l'autre surface : la correspondance cherchée doit être de la forme

$$\frac{Q_2(x, y, z)}{Q_1(x, y, z)} = \frac{A_1 Q'_1(x', y', z') + A_2 Q'_2 + \ldots + A_p Q'_p}{B_1 Q'_1 + B_2 Q_2 + \ldots + B_p Q'_p},$$

$$\frac{Q_3(x, y, z)}{Q_1(x, y, z)} = \frac{C_1 Q'_1 + C_2 Q'_2 + \ldots + C_p Q'_p}{B_1 Q'_1 + B_2 Q'_2 + \ldots + B_p Q'_p},$$

les A, B, C étant des constantes convenables. Si donc $\frac{Q_2}{Q_1}$ et $\frac{Q_3}{Q_1}$ ne sont pas fonctions l'un de l'autre, on peut tirer de là (x, y, z) en fonc-

tions algébriques de (x', y', z'). On aura donc à reconnaître si l'on peut choisir les constantes A, B, C de manière que x', y', z' soient des fonctions rationnelles de x, y, z et inversement. On voit que la méthode précédente avait sur celle-ci l'avantage de n'introduire dans le calcul aucune indéterminée; par contre, nous pouvons ici étudier complètement le cas exceptionnel. Celui-ci est relatif à l'hypothèse où $\frac{Q_2}{Q_1}$ et $\frac{Q_3}{Q_1}$ seraient liées par une relation.

Ainsi, Q_1, Q_2, Q_3 désignant trois polynômes adjoints quelconques de la surface f, on suppose que l'on a la relation

$$\psi\left(\frac{Q_2}{Q_1}, \frac{Q_3}{Q_1}\right) = 0,$$

ψ étant nécessairement un polynôme, et cela pour tout point (x, y, z) de f. Considérons la surface

$$Q_2 - \lambda Q_1 = 0.$$

Quand λ varie, elle coupe f suivant une certaine courbe C mobile avec λ.

Prenons un point sur cette courbe C, et un autre point en dehors; nous pouvons déterminer le polynôme adjoint Q_3 de telle sorte qu'il s'annule pour ces deux points. Q_3 étant ainsi déterminé, reprenons l'identité supposée

$$\psi\left(\frac{Q_2}{Q_1}, \frac{Q_3}{Q_1}\right) = 0.$$

Quand (x, y, z) décrit la courbe C, Q_3 reste constant et égal à zéro; donc

$$Q_3 = 0$$

coupe la surface f suivant la courbe C; mais en même temps il doit y avoir une autre courbe d'intersection, puisque la surface Q_3 passe par un point de f qui n'est pas sur C. Ainsi donc $Q_3 = 0$, qui est une adjointe arbitraire, coupe la surface suivant une courbe décomposable.

Nous nous sommes déjà trouvé précédemment dans ce cas, où une adjointe quelconque coupe la surface suivant *plusieurs* courbes va-

riables. Nous avons dit alors que ces courbes variables étaient toutes du genre *un*.

Dans ce cas particulier, la recherche de la correspondance des deux surfaces f et F se fera sans difficultés, en raisonnant sur les deux surfaces f et F, comme nous avons raisonné sur une seule surface au n° 4 du troisième Chapitre. Nous avons sur les deux surfaces deux réseaux de courbes de genre *un*, qui doivent se transformer l'un dans l'autre.

Il a été supposé, dans ce qui précède, que p était au moins égal à trois. Le cas de $p = 2$ peut se traiter comme le cas particulier qui précède; il rentre en effet dans ce cas, car nous savons que, pour $p = 2$, toute adjointe coupe la surface suivant une courbe du premier genre ([1]).

7. Ainsi, *étant données deux surfaces de genre supérieur à un, nous savons reconnaître si elles se correspondent point par point;* mais nous n'avons pu traiter, en général, la même question pour les surfaces du genre zéro ou un. Nous dirons seulement à ce sujet qu'une condition nécessaire se trouvera exprimée par l'égalité du nombre des cycles à *une* et *deux* dimensions de la surface.

CHAPITRE V.

QUELQUES APPLICATIONS AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

I. — Généralités.

1. Nous allons nous occuper principalement, dans ce Chapitre, des équations différentielles de la forme

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0, \tag{1}$$

([1]) On remarquera que la méthode employée dans ce paragraphe peut évidemment aussi être employée pour étudier les transformations d'une surface en elle-même, et qu'il en résulte de suite une nouvelle démonstration du théorème démontré dans la première Section de ce Chapitre.

f étant un polynôme en y, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$. La variable indépendante ne figure pas dans l'équation qui, par suite, se ramène à une équation du premier ordre, mais nous voulons garder l'équation sous cette forme, et c'est du cas où l'intégrale générale de cette équation serait une fonction uniforme de x que nous allons nous occuper.

Supposons donc que l'intégrale générale de l'équation précédente soit une fonction uniforme de x, n'ayant que le seul point ∞ comme point singulier essentiel; soit $y = P(x)$ une intégrale quelconque.

Pour une valeur de x, qui ne soit pas un pôle de $P(x)$, on pourra, pour h suffisamment petit, développer $P(x+h)$,

$$P(x+h) = P(x) + h\,P'(x) + \ldots,$$

et les coefficients des puissances de h seront des fonctions rationnelles de $P(x)$, $P'(x)$ et $P''(x)$. Par suite, $P(x+h)$ est une fonction uniforme de $P(x)$, $P'(x)$ et $P''(x)$, qui sont d'ailleurs liées par la relation (1), du moins dans le voisinage d'un système de valeurs de P, P′ et P″ finies, et n'annulant pas $\frac{\partial f}{\partial P''} = 0$.

L'élément de fonction du point analytique (P, P′, P″), ainsi déterminé, s'étendra manifestement de proche en proche; on obtiendra ainsi une fonction analytique uniforme de (P, P′, P″), d'après l'hypothèse faite que l'intégrale $P(x)$ est une fonction uniforme. Nous pouvons donc écrire

$$(2)\qquad \begin{cases} P(x+h) = \varphi[P(x), P'(x), P''(x), h], \\ P'(x+h) = \psi[P(x), P'(x), P''(x), h], \\ P''(x+h) = \chi[P(x), P'(x), P''(x), h], \end{cases}$$

φ, ψ et χ étant des fonctions uniformes du point analytique (P, P′, P″) et de h.

Des équations (2), on peut évidemment tirer $P(x)$, $P'(x)$ et $P''(x)$ en fonctions uniformes de $[P(x+h), P'(x+h), P''(x+h)]$. La transformation (2) *est donc biuniforme*. Mais nous avons déjà dit que, entre les points de deux surfaces, pouvaient exister des transformations biuniformes qui ne sont pas birationnelles. Prenons comme exemple

d'équations qui conduisent à une transformation (2), qui ne soit pas birationnelle, l'équation

$$yy'' - y'^2 = 2y^2;$$

on a

$$y = Ce^{x^2},$$

et l'on trouve de suite

$$P(x+h) = P(x)e^{h^2}e^{h\frac{P'(x)}{P(x)}}.$$

C'est le cas où cette transformation biuniforme serait birationnelle que nous allons d'abord traiter.

2. Dans tout ce qui va suivre, la transformation biuniforme (2) est donc supposée birationnelle. *La surface*

$$f(y, y', y'') = 0$$

admet donc une transformation birationnelle en elle-même, renfermant un paramètre arbitraire h.

Écrivons cette transformation

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} Y &= \varphi(y, y', y'', h),\\ Y &= \psi(y, y', y'', h),\\ Y'' &= \chi(y, y', y'', h),\end{aligned}\right.$$

et transcrivons-la de nouveau en désignant par des lettres indéterminées les divers coefficients; soit alors

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} Y &= \lambda(y, y', y''),\\ Y' &= \mu(y, y', y''),\\ Y'' &= \nu(y, y', y'').\end{aligned}\right.$$

Soit y une solution de l'équation f; écrivons que

$$(3)\qquad f(Y, Y', Y'') = 0, \qquad \frac{dY}{dx} = Y', \qquad \frac{dY'}{dx} = Y''.$$

Nous obtenons ainsi trois relations entre y, y', y'' et les coefficients de λ, μ et ν.

Divers cas pourront se présenter [1] :

1° Les coefficients dans λ, μ, ν dépendent d'une seule constante arbitraire. La forme (1) rentrera dans le type (2) ainsi trouvé. Dans ces conditions, les coefficients dans (1), qui sont des fonctions uniformes de h, sont liés deux à deux par des équations algébriques; par conséquent, Y et Y′ sont liés par une relation algébrique; donc l'intégrale générale sera une fonction doublement périodique de h, et les périodes ne dépendront pas de la constante d'intégration.

2° Les coefficients dans λ, μ et ν dépendent de deux arbitraires, soient α et β; écrivons alors

$$\begin{aligned} Y &= \lambda(y, y', y'', \alpha, \beta), \\ Y' &= \mu(y, y', y'', \alpha, \beta), \\ Y'' &= \nu(y, y', y'', \alpha, \beta), \end{aligned}$$

y désignant une solution quelconque de l'équation f, Y représentera l'intégrale générale de cette équation avec les constantes α et β.

Deux cas peuvent se présenter :

I. La substitution précédente ne forme pas un groupe de transformations. Prenons alors

$$\lambda(y, y', y'', \alpha, \beta), \quad \mu(y, y', y'', \alpha, \beta), \quad \ldots$$

et

$$\lambda(y, y', y'', \alpha_1, \beta_1), \quad \mu(y, y', y'', \alpha_1, \beta_1), \quad \ldots,$$

α, β et α_1, β_1 étant arbitraires, l'expression

$$(1) \qquad \lambda[\lambda(y, y', y'', \alpha, \beta), \mu, \nu, \alpha_1, \beta_1]$$

sera encore une solution de l'équation; elle doit donc être de la forme

$$(2) \qquad \lambda(y, y', y'', \alpha_2, \beta_2).$$

---

[1] On reconnaîtra, dans ce qui va suivre, une succession de raisonnements analogues à ceux qui ont été employés dans le troisième Chapitre.

α_2 et β_2 étant indépendants de x; mais, par hypothèse, la substitution ne définit pas un groupe de transformations, c'est-à-dire qu'on ne pourra pas trouver α_2 et β_2 dépendant uniquement de (α, β) et (α_1, β_1), de telle sorte que (1) et (2) soient identiques pour tout *point* y, y', y'' de f. On pourra cependant sûrement trouver des quantités α_2, β_2 indépendantes de x, de telle sorte que (1) et (2) représentent la même fonction de x. On aura donc ainsi, entre y, y', y'', une nouvelle relation algébrique, relation qui, comme on voit, dépendra de l'intégrale considérée y, car les quantités α_2 et β_2 ne seront pas indépendantes de la constante figurant dans y.

Nous avons donc, en résumé, une seconde relation algébrique entre y, y', y'', relation qui n'est d'ailleurs pas indépendante de l'intégrale particulière considérée y. Il s'ensuit, par l'élimination de y'' entre cette relation et l'équation différentielle f, qu'il y a entre y et y' une relation algébrique.

L'intégrale générale de l'équation est encore une fonction doublement périodique (ou dégénérescence).

Appelons *le cas* D les cas où l'intégrale est doublement périodique (ou dégénérescence).

II. Nous arrivons enfin au cas où les expressions λ, μ, ν donneraient un groupe de transformations à deux paramètres α et β. Nous n'avons pas besoin de répéter la série des raisonnements qui ont été faits dans le n° **7** de notre second Chapitre. Il n'y aurait, sur ce point, rien à changer aux raisonnements. On verra donc, par une marche toute semblable, que *ce groupe de transformations est permutable*.

Ainsi nous sommes conduit à cette conclusion, que la surface

$$f(y, y', y'') = 0$$

admet un groupe de transformations birationnelles à deux paramètres et permutables.

Or nous avons démontré, dans le Chapitre précédent, le théorème suivant : si une surface

$$f(x, y, z) = 0$$

admet un groupe de transformations birationnelles à deux paramètres et permutable, la correspondance entre (x, y, z) et (x', y', z') sur la

surface sera donnée par les deux équations

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy = P(x', y', z')\,dx' + Q(x', y', z')\,dy',$$
$$P_1(x, y, z)\,dx + Q_1(x, y, z)\,dy = P_1(x', y', z')\,dx' + Q_1(x', y', z')\,dy',$$

ou, si l'on veut, par

$$\int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} P\,dx + Q\,dy - \int_{x'_0, y'_0, z'_0}^{x', y', z'} P\,dx + Q\,dy = \text{const.}$$

et

$$\int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} P_1\,dx + Q_1\,dy - \ldots = \text{const.},$$

ce qui veut dire que (x', y', z') est une fonction de (x, y, z), telle que la différence qui forme le premier membre ne dépend pas de (x, y, z).

Par suite, si l'on considère

$$\int_{y_0, y'_0, y''_0}^{y, y', y''} P\,dx + Q\,dy \quad \text{et} \quad \int_{y_0, y'_0, y''_0}^{y, y', y''} P_1\,dx + Q_1\,dy,$$

ce seront des fonctions de x, $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ qu'il sera bien facile de trouver.

Si, en effet, on remplace x par $x + h$, (y, y', y'') éprouve une transformation du groupe, et devient (Y, Y', Y''), la différence

$$\int_{y_0, y'_0, y''_0}^{y, y', y''} P\,dx + Q\,dy - \int_{Y_0, Y'_0, Y''_0}^{Y, Y', Y''} P\,dx + Q\,dy$$

ne dépend pas de y, y', y'', mais seulement de la transformation, c'est-à-dire de h; elle ne dépend donc pas de x. Ceci revient à dire que

$$\lambda(x + h) - \lambda(x) \quad \text{et} \quad \mu(x + h) - \mu(x)$$

ne dépendent pas de x, quel que soit h.

Donc

$$\lambda(x) = ax + \alpha,$$
$$\mu(x) = bx + \beta,$$

a, b, α et β étant indépendants de x.

Nous pouvons donc énoncer le théorème *fondamental* qui suit :

Il existera pour la surface $f(y, y', y'') = 0$ deux intégrales de différentielles totales, telles que

$$\int^{y, y', y''} P\,dx + Q\,dy = u,$$

$$\int^{y, y', y''} P_1\,dx + Q_1\,dy = v,$$

donneront pour y, y' et y'' des fonctions uniformes de u et v; soit

$$y = \Theta(u, v);$$

alors l'intégrale générale de l'équation sera

$$y = \Theta(ax + \alpha, bx + \beta),$$

α et β étant des constantes arbitraires, et a et b deux constantes.

II. — Recherche de l'intégrale.

5. Nous devons maintenant nous proposer de reconnaître, autant qu'il sera possible, sur l'équation différentielle elle-même, si cette équation rentre dans la classe d'une intégrale générale uniforme avec une substitution correspondante birationnelle.

Mais, auparavant, faisons deux remarques générales. Tout d'abord, si la surface

$$f(y, y', y'') = 0$$

est de *genre supérieur à l'unité*, on tire de suite une conséquence importante de ce que la surface admet une infinité de transformations birationnelles. Nous pouvons écrire en effet, en remplaçant x par zéro et h par x,

$$y = \varphi(x, y_0, y'_0, y''_0),$$
$$y' = \psi(x, y_0, y'_0, y''_0),$$
$$y'' = \chi(x, y_0, y'_0, y''_0),$$

y_0, y'_0, y''_0 désignant les valeurs de y, y', y'' pour $x = 0$.

Désignons alors par $Q_1(y, y', y'')$ et $Q_2(y, y', y'')$ deux polynômes adjoints d'ordre $(m-4)$. En refaisant les raisonnements faits au commencement du troisième Chapitre, qui traite de la transformation des surfaces, on trouve immédiatement que

$$\frac{Q_1(y, y', y'')}{Q_2(y, y', y'')} = \frac{Q_1(y_0, y'_0, y''_0)}{Q_2(y_0, y'_0, y''_0)};$$

d'où le théorème suivant : dans le cas qui nous occupe, *le genre de la surface*

$$f(y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

est zéro ou un, ou bien on a pour toute intégrale

$$\frac{Q_1(y, y', y'')}{Q_2(y, y', y'')} = a, \tag{2}$$

a étant une constante. Les équations (1) et (2) entraînent une relation algébrique entre y et y', et, par conséquent, les intégrales seront des fonctions doublement périodiques (ou dégénérescences). Dans le cas où les intégrales seront doublement périodiques, le module ne dépendra pas de la constante arbitraire.

On voit donc que le cas où le genre de f serait supérieur à l'unité ne présente aucune difficulté, et nous pouvons, par suite, supposer que le genre de f est égal à *zéro* ou à *un*.

Voici une seconde remarque : Si, le genre de la surface

$$f(y, y', y'') = 0$$

étant zéro ou un, celle-ci admet seulement un groupe de transformations à *un* paramètre, on aura, comme nous l'avons déjà dit (cas I) pour y, y', y'', des fonctions doublement périodiques de x avec un module toujours le même.

4. Ces remarques faites, je considère d'abord le cas où le genre de f serait l'unité, et je vais chercher dans quels cas l'intégrale générale

correspondra aux cas D. Si l'on se trouve dans ce cas, l'intégrale générale sera certainement doublement périodique; elle ne peut être, en effet, rationnelle en x, ou fonction rationnelle de e^{ax}, *puisque le genre de la surface est l'unité*.

Écrivons $f(y, z, t) = 0$, et soit $Q(y, z, t)$ l'unique polynôme adjoint d'ordre $(m - 4)$.

y, z et t sont fonctions doublement périodiques de x, et fonctions d'un paramètre α, qui est la constante de l'intégration; d'ailleurs $z = y'$, $t = y''$.

Si l'on considère alors

$$\frac{Q(y, z, t)\left[\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial \alpha} - \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial x}\right]}{f_t'},$$

cette expression, fonction doublement périodique en x (qui sert à former l'élément de l'intégrale double de première espèce), restera finie pour toute valeur de x; ce sera donc une fonction de α seulement, puisqu'elle doit se réduire à une constante par rapport à x.

En faisant sur α un changement de variable convenable et en désignant par a le nouveau paramètre, on pourra manifestement écrire

$$\frac{Q(y, z, t)\left[\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial a} - \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial x}\right]}{f_t'} = 1.$$

Or les équations

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial a}da,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial a}da$$

donnent

$$da = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}dy - \frac{\partial y}{\partial z}dz}{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial x}} - \frac{Q(y, z, t)[z\,dz - t\,dy]}{f_t'};$$

donc

$$(e) \qquad a = \int^{y, z, t} \frac{Q(y, z, t)(z\,dz - t\,dy)}{f_t}$$

et cette intégrale portera nécessairement sur une différentielle totale, car a peut être considéré comme fonction de (y, z, t).

Ainsi, *la constante d'intégration a peut s'exprimer par une intégrale de différentielle totale attachée à la surface f.*

La relation (e) doit exprimer entre y, z et t une relation algébrique (*voir* plus bas)

$$R(y, z, t) = C,$$

R étant rationnelle, qui correspond au faisceau de courbes de genre un, tracé sur la surface. Si donc on peut mettre l'équation (e) sous cette seconde forme, on aura une équation

$$R(y, y', y'') = C,$$

et, pour achever, il n'y aura plus qu'à traiter une équation entre y et y'.

On voit que, théoriquement, la solution n'est pas complète, puisque c'est seulement *sous forme intégrale* que nous trouvons le faisceau des courbes de genre un, qui correspondent aux solutions supposées doublement périodiques. Pratiquement, la relation (e) permettra, le plus souvent, d'achever l'intégration de l'équation.

5. J'ajouterai encore une remarque générale concernant le cas D. Je dis, en premier lieu, que, dans ce cas, l'intégrale générale sera obtenue en joignant à

$$f(y, y', y'') = 0$$

une équation $R(y, y', y'') = C$, où R est une fonction rationnelle de y, y', y''; c'est un point qui n'est pas absolument évident, que la constante puisse s'exprimer rationnellement (et non pas simplement algébriquement) en fonction de y, y', y''. Mais il le devient, si l'on se rappelle le théorème suivant de M. Fuchs : Quand l'intégrale générale d'une équation de premier ordre

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

est algébrique (F est un polynôme), on peut la considérer comme donnée par cette équation F et l'équation

$$R\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = C,$$

R étant rationnelle.

Ceci admis, on n'a qu'à remplacer l'équation f par l'équation du premier ordre

$$f\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0,$$

dont, dans l'hypothèse admise, l'intégrale générale sera algébrique, et l'on a de suite le résultat annoncé.

Considérons donc les équations

$$f(y, y', y'') = 0, \qquad R(y, y', y'') = C;$$

le réseau R coupe la surface suivant une ou plusieurs courbes du genre zéro ou un. Les équations de leur projection en y et y' seront donc données par

$$\varphi(y, y', \lambda, C) = 0,$$

φ étant un polynôme irréductible; λ et C sont liées par une relation algébrique

$$F(\lambda, C) = 0.$$

λ est, comme C, une fonction rationnelle de y, y', y''.

Si le genre de la relation F *est égal ou supérieur à un*, la surface f aura au moins une intégrale de *première* espèce; on pourra chercher directement les intégrales de première espèce de f. S'il n'y en a qu'une, c'est que le genre de F est égal à un, et l'on aura

$$\int P\,dy + Q\,dy' = \text{const.},$$

c'est-à-dire le faisceau sous la forme intégrale. S'il y a plusieurs inté-

grales de première espèce, deux de celles-ci étant fonctions l'une de l'autre, on aura, en formant le quotient des coefficients de dy ou dy' dans les deux intégrales, l'équation du réseau sous forme finie. S'il y a deux intégrales ne dépendant pas l'une de l'autre, on aura les deux équations

$$x = \int P_1 dy + Q_1 dy',$$

$$C = \int P\, dy + Q dy',$$

qui devront donner y, y', y'' en fonction uniforme de x.

Si le genre de F *est nul*, en exprimant λ et C en fonction d'un paramètre α (uniformément), l'équation pourra s'écrire

$$\varphi(y, y', \alpha) = 0,$$

et α, qui est fonction rationnelle de λ et C, pourra s'exprimer rationnellement en y, y', y'', c'est-à-dire que nous remplaçons le faisceau R par le faisceau

$$S(y, y', y'') = \alpha$$

(S étant rationnelle), qui coupe la surface suivant une *seule* courbe mobile de genre zéro ou un.

Nous avons donc le théorème suivant : Si la surface f n'a pas d'intégrale de première espèce, et si l'intégrale générale est une fonction doublement périodique ou dégénérescence d'une telle fonction, cette intégrale générale peut s'obtenir en adjoignant à f l'équation d'un faisceau

$$S(y, y', y'') = \alpha$$

qui coupe la surface suivant une seule courbe (variable avec α).

En particulier, dans le cas des dégénérescences, la courbe sera de genre zéro. On a donc alors un faisceau coupant la surface f suivant une *seule courbe* de genre zéro. Il résulte alors d'un théorème de

M. Nöther (*Math. Annalen*, t. III) que la surface sera unicursale, et d'une manière uniforme. Nous avons donc cet énoncé :

Si l'équation différentielle

$$f(y, y', y'') = 0$$

a pour intégrale générale une fonction rationnelle de x ou de e^{ax}, la surface f sera uniformément unicursale, à moins qu'elle ne possède une intégrale de première espèce.

Je n'ai rien de plus à ajouter sur *le cas* D; la solution est complète quand le genre de la surface est *supérieur* à un. Elle laisse peu à désirer quand le genre est *égal* à un; mais, pour le genre zéro, c'est seulement dans le cas où la surface aura des intégrales de première espèce que l'on pourra tirer parti de ce que nous avons dit, pour la recherche effective des intégrales.

6. Occupons-nous maintenant du cas différent du cas D. Nous avons établi qu'alors il y avait deux intégrales de différentielles totales

$$\int P\,dy + Q\,dy' \quad \text{et} \quad \int P_1\,dy + Q_1\,dy',$$

telles que les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int^{f(y,y',y'')} P\,dy + Q\,dy' = u, \\ \displaystyle\int^{f(y,y',y'')} P_1\,dy + Q_1\,dy' = v \end{cases}$$

donnent pour y, y' et y'' des fonctions uniformes de u et v; soit

$$y = \Theta(u, v);$$

de plus, en remplaçant u et v respectivement par $ax + C$ et $a'x + C'$, a et a' étant deux constantes convenables, C et C' deux constantes arbitraires, on a l'intégrale générale de l'équation.

Par les équations ci-dessus écrites, les coordonnées d'un point quelconque de la surface f s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres; nous pourrons donc faire usage de tout ce que nous avons dit sur de telles surfaces dans le troisième Chapitre.

Si la surface f appartient à la première classe de surfaces, pour lesquelles y, y', y'' s'expriment par des fonctions uniformes quadruplement périodiques de u et v, ce que nous savons reconnaître, on aura

$$y = \Theta(ax + C, a'x + C'),$$

Θ étant une fonction quadruplement périodique de u et v.

J'ajoute cette remarque, *que ce cas est le seul qui puisse se présenter quand le genre de la surface est égal à l'unité*. Ceci résulte de suite de ce que nous avons dit au troisième Chapitre que toutes les dégénérescences correspondaient au genre zéro.

Dans le cas où les intégrales (1) auraient trois périodes, l'une d'elles est de première espèce. Cette intégrale

$$\int P\,dy + Q\,dy'$$

peut être formée; elle ne devra avoir que deux périodes, car la surface a seulement deux cycles linéaires (*voir* Chapitre III). Or on peut étudier les cycles linéaires, et par conséquent reconnaître le nombre des périodes. Soit $\lambda(z)$ une fonction doublement périodique aux mêmes périodes :

$$\lambda\left[\int^{(y,y',y'')} P\,dy + Q\,dy'\right]$$

sera une fonction rationnelle de (y, y', y''), soit $R(y, y', y'')$. On aura l'équation

$$R(y, y', y'') = \lambda(ax),$$

dont l'intégrale générale devra être uniforme.

Ce qui précède s'applique aussi au cas où les intégrales (1) auraient deux périodes, l'une d'elles étant de première espèce.

Dans tous les autres cas, la surface sera nécessairement uniforme,

et l'expression générale de y sera une fonction rationnelle de e^{ax}, e^{bx}, ou une fonction rationnelle de x et e^{ax}, ou enfin une fonction rationnelle de x.

III. — Examen du cas général.

7. Nous avons supposé jusqu'ici qu'une certaine transformation biuniforme était birationnelle. Il faudrait examiner maintenant le cas général où l'équation

$$f(y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

a son intégrale générale uniforme; c'est une question qui présente les plus grandes difficultés. Les considérations qui suivent vont nous montrer la difficulté du problème.

L'équation précédente revient à l'équation du premier ordre

$$f\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0. \tag{2}$$

Pour étudier p comme fonction de y, on peut appliquer les principes développés par Briot et Bouquet dans leur Mémoire classique; pour éliminer une première série de difficultés, nous allons supposer que, dans l'étude des singularités de cette équation, on puisse *toujours* se trouver ramené au cas, à la fois général et simple, spécialement étudié par Briot et Bouquet, c'est-à-dire, en employant les notations de ces auteurs,

$$t\frac{d\zeta}{dt} = a\zeta + bt + \ldots.$$

et que de plus les développements en séries correspondant aux intégrales ne contiennent pas de logarithmes. Ces conditions se trouveront réalisées bien évidemment dans un grand nombre de cas.

Quand l'équation (2) aura été complètement discutée, on aura à revenir à l'équation initiale, c'est-à-dire poser

$$\frac{dy}{dx} = p(y).$$

La grande difficulté est de reconnaître si y ainsi définie est une fonction uniforme de x. Il est facile de reconnaître si, dans le voisinage de chaque valeur atteinte par la variable x, la fonction y est uniforme; mais cela ne fait pas nécessairement, quand il en est ainsi, que la fonction y soit réellement une fonction uniforme. Il y a là une difficulté considérable, qu'il paraît bien difficile de lever, et nous avons dû nous borner à ce cas des fonctions intégrales de l'équation (1), que l'on pourrait appeler *à apparence uniforme*.

Arrêtons-nous spécialement sur le cas où l'équation a la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = R\left(y, \frac{dy}{dx}\right),$$

R étant rationnelle en y et $\frac{dy}{dx}$.

On voit aisément tout d'abord que l'équation doit être de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A(y) + B(y)\left(\frac{dy}{dx}\right) + C(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

A, B, C étant rationnels en y.

On vérifiera encore facilement, toujours sous les conditions énoncées au début, que l'équation a la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{A(y) + B(y)\frac{dy}{dx} + C(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{(y-a)(y-b)\ldots(y-l)},$$

les quantités distinctes $a, b, \ldots, l$ étant en nombre m, et A, B, C étant maintenant des polynômes en y,

A de degré $m+3$,
B » $m+1$,
C » $m-1$.

Prenons donc un tel type d'équations, et cherchons à quelles conditions l'intégrale générale pourra être uniforme.

Considérons donc l'équation

$$(3) \qquad p\frac{dp}{dy} = \frac{A(y) + B(y)p + C(y)p^2}{(y-a)\ldots(y-l)}.$$

Tout d'abord $y = a, \ldots, l$ peuvent être des points singuliers des intégrales. Prenons a, et considérons l'équation

$$A(a) + B(a)p + C(a)p^2 = 0$$

dont nous supposons les deux racines p_1 et p_2 distinctes et différentes de zéro.

A quelles conditions toutes les intégrales de cette équation, qui pour $y = a$ deviendront égales à p_1 ou p_2, seront-elles des fonctions uniformes dans le voisinage de $y = a$? C'est ce que nous savons trouver avec Briot et Bouquet; ceci exigera deux conditions, dans lesquelles figure d'ailleurs un entier positif arbitraire. Nous aurons donc deux conditions à écrire pour chaque racine du dénominateur, ce qui fait $4m$ relations. Nous aurons ensuite quatre conditions à écrire, relativement à $y = \infty$, ce qui se fera en changeant dans l'équation y en $\frac{1}{y}$, et raisonnant sur $y = 0$ comme nous avons raisonné sur $y = a$. Nous obtiendrons ainsi $4m + 4$ équations, qui pourront d'ailleurs n'être pas distinctes et renfermeront des entiers arbitraires.

En raisonnant comme nous venons de le faire, nous avons supposé que l'équation avait une *infinité* d'intégrales devenant égales à p_1, et une *infinité* d'intégrales devenant égales à p_2, pour $y = a, \ldots, l$. Quand ces intégrales existent, il faut bien qu'elles soient holomorphes en y, car ce sera pour une valeur finie de x que l'on aura ici $y = a$, puisque l'on a $\int^y \frac{dy}{p} = x$, et nous avons supposé $p_1 p_2 \neq 0$. On pourrait, en restant dans la plus grande généralité, se trouver dans d'autres conditions; il pourra arriver qu'une *seule* intégrale (l'holomorphe) devienne égale à p_1 pour $y = a$. Il n'y a là qu'une condition d'inégalité, et nous n'avons pas alors de condition à écrire relativement à cette racine p_1.

Il faut ensuite chercher s'il n'y aurait pas d'intégrale de l'équa-

tion (3) devenant infinie pour $y = a$. Or, si l'on change dans cette équation p en $\frac{1}{p'}$, elle devient

$$-\frac{dp'}{dy} = \frac{A(y)p'^3 + B(y)p'^2 + C(y)p'}{(y-a)\ldots(y-l)}.$$

Il ne doit pas, dans le cas qui nous occupe, y avoir d'autre intégrale de cette équation s'annulant pour $y = a$, que $p' = 0$; car l'égalité $\int p'dy = x$ montre que x sera finie; donc, pour une valeur finie de x, y serait finie et $\frac{dy}{dx}$ infinie. La condition indiquée exige seulement que

$$\frac{C(a)}{(a-b)\ldots(a-l)}$$

ait sa partie réelle positive; nous avons seulement donc une condition d'inégalité.

Nous avons encore à considérer le cas où p deviendrait nulle pour une valeur finie de y; il n'y a aucun embarras si cette valeur de y n'est pas racine de $A(y)$; car on a

$$\frac{p(y-a)(y-b)\ldots(y-l)}{A + Bp + Cp^2} = \frac{dy}{dp};$$

on aura donc

$$y = \alpha p^2 + \ldots,$$

en supposant que la valeur de y soit $y = 0$, ce qui ne restreint rien; donc

$$p = \beta\sqrt{y} + \gamma(\sqrt{y})^2 + \ldots.$$

$\alpha = 0$, comme on le voit de suite; par suite,

$$\frac{dy}{\sqrt{y}}(\beta' + \gamma'\sqrt{y} + \ldots) = dx,$$

l'inversion sera uniforme.

Si la valeur de y est racine de $A(y)$, nous sommes dans des conditions différentes, puisque alors $\frac{dy}{dp}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. La dis-

cussion n'offre cependant aucune difficulté. Il suffit de poser, en désignant par α la valeur de y,

$$y - \alpha = \lambda p$$

et l'on a la forme classique. On aura seulement des conditions d'inégalité à écrire.

On devra enfin se livrer, pour $y = \infty$, à la même discussion des différents cas que nous venons d'examiner pour y fini. C'est ce que nous avions déjà d'ailleurs indiqué plus haut.

8. Nous supposons donc remplies toutes les conditions d'égalités ou d'inégalités, dont il vient d'être parlé. *L'intégrale générale de l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{A(y) + B(y)\frac{dy}{dx} + C(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{(y-a)\ldots(y-l)}$$

sera une fonction de x à apparence uniforme.

Prenons maintenant un cas particulier; le plus simple correspond à $m = 0$. Nous aurons l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ay^3 + by^2 + cy + d + (ky + h)\frac{dy}{dx}.$$

Nous avons à étudier l'équation

$$p\frac{dp}{dy} = ay^3 + by^2 + cy + d + (ky + h)p.$$

Cherchons d'abord si, pour une valeur finie de y, on peut avoir p infini. Changeant p en $\frac{1}{p'}$, l'équation devient

$$-\frac{dp'}{dy} = p'^3(ay^3 + by^2 + \ldots + d) + (ky + h)p'^2 :$$

donc il n'y a que p' identiquement nul.

Examinons ensuite si pour y, racine de l'équation

$$ay^3 + by^2 + cy + d = 0,$$

on ne pourrait pas avoir $p = 0$. Supposons, comme il est permis, $d = 0$ et soit $y = 0$ cette racine. En posant $p = \lambda y$, l'équation devient

$$(3) \qquad y\frac{d\lambda}{dy} = \frac{ay^2 + by + c - \lambda^2 + (ky + h)\lambda}{\lambda};$$

on a à considérer les racines de $c - \lambda^2 + h\lambda = 0$; soient λ_1 et λ_2 ces racines. Il faut envisager le coefficient de $\lambda - \lambda_1$ ou $\lambda - \lambda_2$ dans le second membre; ces coefficients sont

$$-2 + \frac{h}{\lambda_1} \quad \text{et} \quad -2 + \frac{h}{\lambda_2};$$

si leurs parties réelles sont négatives, il n'y aura que deux intégrales (les holomorphes) et pas d'autres. Si ces quantités sont positives, il y aura d'autres intégrales devenant égales à λ_1 ou λ_2; mais, dans tous les cas, l'équation

$$\frac{dy}{dx} = y(\lambda_1 + \ldots),$$

ne donnera pas pour x une valeur finie, quand y tendra vers zéro. Il n'y aura donc pas de ce chef de valeur de x où la fonction cesse d'avoir une apparence uniforme. Il n'y a pas à se préoccuper enfin pour l'équation (3) du cas de $\lambda = 0$ pour $y = 0$, car ceci équivaut à p ayant dans l'équation initiale une valeur finie arbitraire différente de zéro.

9. Nous avons jusqu'ici laissé de côté le cas de $y = \infty$; remplaçons, pour étudier ce cas, y par $\frac{1}{y'}$, dans l'équation initiale. Elle devient

$$\frac{d^2y'}{dx^2} = \frac{2\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2 - a - by' - cy'^2 - dy'^3 + (k + hy')\frac{dy'}{dx}}{y'}.$$

Nous avons donc à étudier les intégrales de l'équation

$$(4) \qquad y'\frac{dp'}{dy'} = \frac{2p'^2 - a - by' - cy'^2 - dy'^3 + (k + hy')p'}{p'},$$

dans le voisinage de $y' = 0$. Soit l'équation

$$2p'^2 - a + kp' = 0,$$

dont les racines, supposées distinctes, seront désignées par p'_1 et p_2.

Si l'on suppose qu'il y ait une infinité d'intégrales holomorphes devenant égales à p'_1 et pareillement pour p'_2, il faudra que

$$2 + \frac{a}{p_1'^2} \quad \text{et} \quad 2 + \frac{a}{p_2'^2},$$

qui représentent respectivement les dérivées du second membre de (4) pour $y' = 0$, $p' = p'_1$ et pour $y' = 0$, $p' = p'_2$, soient des entiers positifs. Ces deux quantités peuvent se remplacer par $4 + \frac{k}{p'_1}$ et $4 + \frac{k}{p'_2}$.

Ainsi $\frac{k}{p'_1}$ et $\frac{k}{p'_2}$ sont des entiers au moins égaux à -3.

Soit $\frac{k}{p_1} = m$, $\frac{k}{p_2} = n$, on aura $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = -\frac{1}{2}$, $\frac{k^2}{mn} = -\frac{a}{2}$.

On pourra satisfaire à la première relation avec des entiers au moins égaux à -3, dans la seule hypothèse

$$m = -1, \qquad n = 2; \qquad \text{on aura alors} \qquad k^2 = a.$$

On a encore deux autres relations à écrire; elles sont faciles à former, mais très compliquées. Je ne les écrirai pas ici, me proposant tout à l'heure de faire le calcul complet pour un cas particulier un peu plus simple.

Nous avons, en résumé, *trois relations entre les quantités a, b, c, d, k moyennant lesquelles l'intégrale générale de l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ay^3 + by^2 + cy + d + ky\frac{dy}{dx}$$

est à apparence uniforme (nous avons fait $h = 0$, comme il est évidemment légitime).

10. Une question se pose maintenant, qui, si l'intégrale était réellement uniforme dans toute l'étendue du plan, reviendrait à l'*intégration* de l'équation. Peut-on associer à l'équation précédente une autre

équation, présentant les mêmes caractères, mais dont l'intégrale générale *n'aura pas de pôles?* Nous allons voir que la chose est possible.

Quand y devient infinie (soit, par exemple, pour $x = 0$), nous avons deux développements

$$(1) \qquad y = \frac{\alpha}{x} + \beta + \gamma x + \delta x^2 + \ldots.$$

$$(2) \qquad y = \frac{\alpha'}{x} + \beta' + \gamma' x + \delta' x^2 + \varepsilon' x^3 + \ldots.$$

Je suppose que le premier développement corresponde à la racine $p'_1 = -k$, les *trois* premiers coefficients α, β, γ sont déterminés; c'est ce que montre de suite l'équation (4) du paragraphe précédent. Dans le second développement correspondant à $p'_2 = \frac{k}{2}$, les *cinq* premiers coefficients α', β', γ', δ', ε' sont connus.

Écrivons les valeurs de α et β (en supposant, comme plus haut, $h = 0$), on a

$$\alpha = -\frac{1}{k}, \qquad \beta = -\frac{b}{4k^2},$$

$$\alpha' = \frac{2}{k}, \qquad \beta' = -\frac{2b}{5k^2}, \qquad \ldots.$$

Ceci posé, j'écris la combinaison suivante

$$Y = Ay^2 + By + C\frac{dy}{dx}.$$

On peut choisir les constantes A, B, C de manière que Y ne devienne pas infinie pour le premier développement; il suffira que

$$\alpha A - C = 0,$$

$$2A\beta\alpha + B\alpha = 0,$$

ou

$$A + Ck = 0,$$

$$Ab - 2Ba = 0;$$

Y aura donc seulement des pôles (doubles) correspondant au dévelop-

pement (2). Soit

$$Y = \frac{\alpha''}{x^2} + \frac{\beta''}{x} + \gamma'' + \delta'' x + \varepsilon'' x^2 + \eta'' x^3 + \ldots;$$

on voit de suite que α'', β'', γ'', δ'', ε'' sont connus, puisque α', β', γ', δ', ε' le sont. Il ne semble pas *a priori* qu'il en soit de même de η'', mais cependant η'' est également connu; car soit, dans (2), η' le coefficient de x^3, le coefficient de x^3 dans Y sera

$$A.2\alpha'\eta' + 2A\beta'\varepsilon + B\varepsilon' + 4C\eta';$$

or η' disparaît, car $A\alpha + 2C = 0$, puisque $\frac{A}{C} = \frac{1}{\alpha}$, ce qui revient à $\alpha' + 2\alpha = 0$; or $\alpha' = \frac{2}{k}$, $\alpha = -\frac{1}{k}$.

Ayant ainsi formé l'expression Y, posons

$$F = mY^3 + nY^2 + pY + (qY + r)\frac{dY}{dx} + s\left(\frac{dY}{dx}\right)^2,$$

qui aura des pôles sextuples. Les coefficients de toutes les puissances négatives dans le développement au voisinage d'un pôle seront déterminés; c'est ce qui se vérifie immédiatement, puisque dans Y tous les coefficients jusqu'à η'' inclusivement sont déterminés. Par conséquent, on peut choisir les six indéterminées qui figurent dans l'expression précédente, de manière que tous les pôles soient des pôles simples.

Cela fait, le résidu commun correspondant à tous ces pôles sera connu. Si ce résidu n'est pas nul, on pourra faire en sorte qu'il soit égal à l'unité. L'expression

$$G = e^{\int F dx}$$

sera alors, comme F, une fonction à apparence uniforme, *mais elle n'aura plus de pôles*. On voit que, si y est réellement uniforme dans tout le plan, G sera une fonction entière de x. Cette fonction G satisfait à une équation du troisième ordre qui se déduit de suite de l'équation proposée en y; dans ce cas, cette équation du troisième ordre aura pour intégrale générale une fonction holomorphe dans tout le plan.

11. Considérons encore le cas plus particulier de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by^2 + cy = 0.$$

La discussion se fait comme précédemment, sauf pour ce qui concerne $y = \infty$. Ici les pôles seront doubles. Soit $x = 0$ un tel pôle; écrivons le développement

$$y = \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{x} + \gamma + \delta x + \varepsilon x^2 + \eta x^3 + \ldots.$$

Les six premiers coefficients de α à η sont déterminés. Écrivons les résultats complets du calcul :

$$(1) \qquad b\alpha + 6 = 0,$$

$$(2) \qquad \beta = -\frac{a\alpha}{5} = \frac{6a}{5b},$$

$$(3) \qquad 2\gamma = -\frac{c}{b} + \frac{a^2}{25b}.$$

$$(4) \qquad \delta = \frac{a^3}{5^3.2b},$$

$$(5) \qquad 10\varepsilon = \frac{17a\delta}{5} + b\gamma^2 + c\gamma.$$

$$6\eta + 2a\varepsilon + 2b\gamma\delta + 2b\beta\varepsilon + 2b\alpha\eta + c\delta = 0.$$

$$6\eta = 2a\varepsilon + 2b\gamma\delta + 2b\beta\varepsilon + c\delta,$$

$$6\eta = \delta(c + 2b\gamma) + 2\varepsilon(a + b\beta),$$

$$(6) \qquad 6\eta = \frac{a^2}{25}\delta + \frac{22a\varepsilon}{5}.$$

Enfin nous avons l'équation de condition

$$3a\eta + 2b\beta\eta + 2b\gamma\varepsilon + b\delta^2 + c\varepsilon = 0.$$

$$\eta(3a + 2b\beta) + \varepsilon(2b\gamma + c) + b\delta^2 = 0.$$

$$\frac{27\eta a}{5} + \varepsilon\frac{a^2}{25} + b\delta^2 = 0,$$

$$\frac{9a}{10}\left(\frac{a^2\delta}{25} + \frac{22a\varepsilon}{5}\right) + \varepsilon\frac{a^2}{25} + \frac{a^6}{4.5^6.b} = 0.$$

ou, en divisant par $\frac{a^2}{25}$,

$$\frac{9}{2}\left(\frac{a\delta}{5} + 22\varepsilon\right) + \varepsilon\frac{a^4}{4.5^4.b} = 0,$$

$$\frac{9a\delta}{10} + 100\varepsilon + \frac{a^4}{4.5^4.b} = 0,$$

$$\frac{9a\delta}{10} + \frac{a^4}{4.5^4 b} + 34a\delta + 10(b\gamma^2 + c\gamma) = 0;$$

or

$$b\gamma^2 + c\gamma = \frac{b}{4}\left(\frac{a^2}{25b} - \frac{c}{b}\right)^2 + \frac{c}{2}\left(\frac{a^2}{25b} - \frac{c}{b}\right) = \frac{a^4}{4.25^2.b} - \frac{c^2}{4b},$$

$$\frac{349.a\delta}{10} + \frac{a^4}{4.5^4.b} \frac{10a^4}{4.5^4.b} - \frac{5}{2}\frac{c^2}{b} = 0, \qquad \text{de plus} \qquad \delta = \frac{a^3}{5^3.2b}.$$

En réduisant, on arrive à la relation

$$36a^4 = 5^4.c^2.$$

Telle est la condition (tout ce calcul suppose, bien entendu, $b \neq 0$) pour que l'intégrale générale de l'équation soit *à apparence uniforme*.

Nous pouvons ici raisonner sur y comme nous avons raisonné sur Y au paragraphe précédent. On formera une combinaison

$$F = my^3 + ny^2 + py + (qy + r)\frac{dy}{dx} + s\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

telle que

$$G = e^{\int V dx}$$

n'ait plus de pôles.

12. Citons encore un autre type d'équations dont l'intégrale générale est à apparence uniforme.

Étant donnée une surface $f(x, y, z) = 0$, on connaît l'importance de l'identité en x, y et z

$$A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + C\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) f(x, y, z),$$

qui est intimement liée à la théorie des intégrales de première espèce.

Si l'on peut satisfaire à cette identité en prenant pour A un polynôme de degré $m-3$ en y et z et de degré $m-2$ en x, y, z, et pareillement pour B et C l'expression

$$\int \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z}$$

est une intégrale de première espèce (en y ajoutant seulement des conditions relatives à la manière dont se conduisent les surfaces $A=0$, $B=0$, $C=0$, par rapport aux singularités de la surface). Si, ces mêmes dernières conditions étant remplies, nous pouvons trouver trois polynômes A, B, C des degrés indiqués et tels que

$$A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + C\frac{\partial f}{\partial z}$$

soit divisible par $f(x, y, z)$, sans que le quotient soit

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z},$$

l'expression

$$\frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z}$$

ne sera pas une différentielle totale exacte; mais nous pouvons l'appeler une expression différentielle de première espèce, en ce sens que, quelle que soit la relation analytique que l'on établisse entre x et y dans le voisinage d'une valeur arbitraire x_0 et y_0, l'expression

$$\int \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z}$$

reste toujours finie.

Ceci posé, considérons une surface du genre *un*, admettant deux expressions différentielles de première espèce

$$\frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} \quad \text{et} \quad \frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z}$$

($BA_1 - AB_1$ n'étant pas identiquement nul).

Je forme le système des deux équations du premier ordre

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} = du, \\[2ex] \dfrac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z} = 0, \end{cases}$$

devant donner x, y en fonction de la variable indépendante u.

L'intégrale générale de ce système est à apparence uniforme. On a en effet

$$BA_1 - AB_1 = Q(x, y, z)\,f'_z,$$

$Q(x, y, z)$ étant le polynôme adjoint d'ordre $m - 4$ qui coupe (en dehors des lignes multiples) la surface suivant une ou plusieurs courbes C de genre zéro (*voir* au troisième Chapitre). Pour ces courbes C, on a identiquement

$$B\,dx - A\,dy = 0,$$
$$B_1\,dx - A_1\,dy = 0,$$

car, l'expression $\int \dfrac{B\,dx - A\,dy}{f'_z}$ étant de première espèce, quand on remplacera x, y, z par des fonctions rationnelles d'un paramètre, l'expression deviendra infinie si l'élément n'est pas identiquement nul.

Donc il ne sera pas possible pour un système intégral des équations (1) que x, y, z atteigne un point des courbes C. Donc x, y, z ne cesseront jamais d'être des fonctions uniformes de u; *elles seront à apparence uniforme.*

15. Cette étude des équations différentielles algébriques où la variable ne figure pas explicitement, et dont l'intégrale générale est uniforme, me paraît avoir une très grande importance. C'est en l'approfondissant que l'on pourra, sans doute, découvrir de nombreuses classes d'équations différentielles dont l'intégration deviendra possible. Prenons, par exemple, l'équation différentielle du premier ordre

$$(1)\qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

f étant un polynôme.

Le problème suivant mérite d'être posé :

Pourra-t-on déterminer une fonction rationnelle R *de* x, y, z, *cette dernière quantité étant définie par l'équation*

$$f(x, y, z) = 0,$$

de telle sorte que les deux équations différentielles

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = z\mathrm{R}(x, y, z), \\ \dfrac{dx}{dt} = \mathrm{R}(x, y, z) \end{cases}$$

admettent pour intégrales générales des fonctions uniformes de t?

Il en résulterait évidemment l'intégration de l'équation (1), x et y se trouvant exprimés par des fonctions uniformes d'un paramètre.

Pour indiquer au moins un exemple d'une telle intégration, bornons-nous au cas où l'intégration du système (2) se ferait à l'aide des fonctions quadruplement périodiques. Dans ce cas, pour la surface (1), x, y et $\frac{dy}{dx}$ s'exprimeront par des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres u et v; de plus, comme il a été vu, on aura

$$u = at + \mathrm{C}, \qquad v = bt + \mathrm{C}',$$

a et b étant deux constantes convenables, C et C′ deux constantes arbitraires. On pourra tirer de (1)

$$x = \mathrm{F}_1(u, v),$$
$$y = \mathrm{F}_2(u, v),$$
$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{F}_3(u, v),$$

et les fonctions F sont à considérer comme connues.

On devra pouvoir déterminer le rapport des deux constantes a et b

de telle sorte qu'on ait identiquement

$$F_3(u, v) = \frac{a\dfrac{\partial F_2}{\partial u} + b\dfrac{\partial F_2}{\partial v}}{a\dfrac{\partial F_1}{\partial u} + b\dfrac{\partial F_1}{\partial v}}.$$

S'il en est ainsi, on aura l'intégrale générale de l'équation (1) par les formules

$$x = F_1(at + C, bt + C'),$$
$$y = F_2(at + C, bt + C'),$$

et l'on peut dire que, étant donnée l'équation (1), il est possible de reconnaître si elle est susceptible d'être ainsi intégrée.

IV. — Quelques remarques générales.

14. Dans les généralités du n° 1 de ce Chapitre, nous avons supposé que l'intégrale n'avait pas de singularités essentielles à distance finie; d'autres circonstances peuvent se présenter. L'intégrale peut avoir des singularités essentielles à distance finie; voici un premier exemple très simple.

Soit $R(y)$ un polynôme du quatrième degré en y. De la relation

$$e^{\int^{y} \frac{dy}{\sqrt{R(y)}}} = x$$

on peut tirer une équation différentielle

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

f étant un polynôme.

L'intégrale générale de cette équation sera à apparence uniforme; elle aura un point singulier à distance finie, et elle ne sera véritablement une fonction uniforme que si l'intégrale elliptique admet $2\pi i$ pour période. Par cet exemple si simple on voit que les conditions exprimant que l'intégrale d'une équation $f = 0$ est une fonction uni-

forme *se traduiront en général par des relations transcendantes entre les coefficients de l'équation;* au contraire, comme nous l'avons indiqué plus haut, les relations seront algébriques si l'on veut seulement écrire que l'intégrale est à apparence uniforme.

Voici, pour le cas du troisième ordre, un autre exemple où vont se présenter des circonstances analogues, mais d'une manière plus complexe.

Soit l'équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2u}{dy^2} + p\frac{du}{dy} + qu = 0$$

(p et q fonctions algébriques de y).

Le rapport de deux intégrales distinctes satisfait à l'équation bien connue

$$\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = 2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dy},$$

en désignant par $\eta(y)$ le rapport de deux intégrales.

Or posons

$$\eta(y) = z,$$

et considérons y comme fonction de z. Cette fonction y de z satisfera manifestement à une équation du troisième ordre algébrique entre

$$y, \quad \frac{dy}{dz}, \quad \frac{d^2y}{dz^2} \quad \text{et} \quad \frac{d^3y}{dz^3},$$

soit

$$F\left(y, \frac{dy}{dz}, \frac{d^2y}{dz^2}, \frac{d^3y}{dz^3}\right) = 0.$$

Ceci est général; soit maintenant l'équation linéaire telle que

$$\eta(y) = z$$

donne pour y une fonction fuchsienne de z, soit

$$y = \varphi(z).$$

L'intégrale générale de l'équation F sera

$$y = \varphi\left(\frac{az+b}{z+c}\right),$$

a, b, c étant arbitraires. Nous avons donc une équation admettant pour intégrale générale une fonction uniforme, et ce que je veux surtout remarquer, c'est que *le domaine dans lequel est déterminée la fonction est variable avec l'intégrale que l'on considère.*

Un exemple particulier, rentrant dans le type précédent, est fourni par l'équation suivante, rencontrée par Jacobi dans son *Mémoire sur certaines séries de la théorie des fonctions elliptiques* (*Journal de Crelle*, t. 34),

$$y^2\left(y\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\left[16y^3\frac{d^2y}{dx^2} + 1\right].$$

Son intégrale générale est uniforme et de la nature des fonctions modulaires.

15. Les considérations que nous avons développées sur l'équation

$$f(y, y', y'') = 0$$

peuvent, avec très peu de modifications, s'étendre à la classe des équations du second ordre où x figure explicitement

$$f(x, y, y', y'') = 0,$$

quand on est dans le cas dont M. Fuchs a commencé l'étude, et sur lequel, pour les équations du premier ordre, M. Poincaré a donné de si remarquables résultats; je veux parler des équations dans lesquelles les points critiques sont *fixes*, c'est-à-dire indépendants des constantes arbitraires.

Les raisonnements faits par M. Poincaré pour les équations du premier ordre peuvent être répétés ici. Si y_0, y'_0, y''_0 sont les valeurs initiales pour $x = x_0$, on a, si l'on suit un chemin déterminé (ne passant

pas par les points critiques),

$$y = \varphi(x, y_0, y'_0, y''_0),$$
$$y' = \psi(x, y_0, y'_0, y''_0),$$
$$y'' = \chi(x, y_0, y'_0, y''_0),$$

y, y', y'' étant des fonctions *uniformes* de (y_0, y'_0, y''_0), et inversement y_0, y'_0, y''_0 sont des fonctions uniformes de (y, y', y''). *Malheureusement la fin du raisonnement n'est plus applicable;* la transformation qui transforme la surface

$$f(x, y, y', y'') = 0 \qquad \text{ou} \qquad f(x_0, y, y', y'') = 0.$$

est *biuniforme;* mais, nous le savons, elle n'est pas nécessairement birationnelle, et c'est ce qui vient changer du tout au tout le caractère de cette théorie.

Si l'on suppose que la transformation est birationnelle, et que le genre de la surface

$$f(x, y, y', y'') = 0,$$

en y, y', y'', est supérieur à l'unité, le développement de la théorie ne présentera aucune difficulté, après ce que nous avons dit sur la transformation des surfaces. Si la surface f n'admet qu'un nombre limité de transformations birationnelles en elle-même, l'intégrale sera nécessairement algébrique. Si, comme il peut arriver, la surface admet une infinité de transformations birationnelles avec un paramètre arbitraire, on démontre aisément qu'on sera ramené à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre, algébrique entre x, y et y', et dont l'intégrale générale a aussi ses points critiques fixes.

16. Si le genre de la surface

$$f(x, y, y', y'') = 0,$$

pour x arbitraire, est inférieur à deux, nous allons nous borner aux cas où cette surface rentrerait dans l'un ou l'autre des types étudiés aux n°s 4 et 5 du Chapitre III.

Plaçons-nous d'abord dans le premier cas : les coordonnées d'un point quelconque de la surface sont alors susceptibles de s'exprimer par des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres. Les deux surfaces

$$(1)\qquad f(x, y, y', y'') = 0,$$

$$(2)\qquad f(x_0, y_0, y'_0, y''_0) = 0$$

se correspondent, avons-nous dit d'une manière générale, point par point, et il est admis que cette correspondance est birationnelle. Écrivons les équations de la correspondance

$$\begin{aligned} y &= F_1(x, y_0, y'_0, y''_0),\\ y' &= F_2(x, y_0, y'_0, y''_0),\\ y'' &= F_3(x, y_0, y'_0, y''_0), \end{aligned}$$

les F étant rationnelles en y_0, y'_0, y''_0.

Considérons

$$\int P_0\, dy_0 + Q_0\, dy'_0 \quad \text{et} \quad \int R_0\, dy_0 + S_0\, dy'_0,$$

deux intégrales de première espèce de la surface (2).

La transformation précédente les transformera en deux intégrales

$$\int P\, dy + Q\, dy' \quad \text{et} \quad \int R\, dy + S\, dy',$$

relatives à la surface (1), et ici P, Q, R, S dépendront de x en général. Nous pouvons donc écrire

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} \int_{y, y', y''}^{Y, Y', Y''} P\, dy + Q\, dy' &= \int_{y_0, y'_0, y''_0}^{Y_0, Y'_0, Y''_0} P_0\, dy_0 + Q_0\, dy'_0,\\ \int_{y, y', y''}^{Y, Y', Y''} R\, dy + S\, dy' &= \int_{y_0, y'_0, y''_0}^{Y_0, Y'_0, Y''_0} R_0\, dy_0 + S_0\, dy'_0, \end{aligned} \right.$$

en considérant deux intégrales de l'équation différentielle correspondant aux valeurs initiales y_0, y'_0, y''_0 et Y_0, Y'_0, Y''_0.

Les seconds membres, et par suite les premiers, des relations précédentes sont donc des constantes, c'est-à-dire indépendants de x; désignons-les par α et β.

Revenons maintenant aux surfaces (1) et (2), et envisageons une substitution birationnelle, *connue cette fois*, transformant ces surfaces. Soient

$$\begin{aligned} y &= \varphi_1(x, \lambda, \mu, \nu), & f(x, y, y', y'') &= 0, \\ y' &= \varphi_2(x, \lambda, \mu, \nu), & f(x_0, \lambda, \mu, \nu) &= 0, \\ y'' &= \varphi_3(x, \lambda, \mu, \nu), \end{aligned}$$

et nous pouvons supposer que les φ dépendent algébriquement de x. Nous avons là une substitution connue, et les coefficients λ, μ, ν dans les φ sont des fonctions algébriques connues de x. Que va donner cette transformation effectuée sur

$$(4) \qquad \int P\,dy + Q\,dy' \quad \text{et} \quad \int R\,dy + S\,dy'?$$

Si

$$\int A\,d\lambda + B\,d\mu \quad \text{et} \quad \int C\,d\lambda + D\,d\mu$$

sont deux intégrales distinctes de la surface $f(x_0, \lambda, \mu, \nu) = 0$, on aura nécessairement

$$\begin{aligned} P\,dy + Q\,dy' &= M(A\,d\lambda + B\,d\mu) + N(C\,d\lambda + D\,d\mu), \\ R\,dy + S\,dy' &= P(A\,d\lambda + B\,d\mu) + Q(C\,d\lambda + D\,d\mu); \end{aligned}$$

M, N, P, Q *ne dépendront pas de* x, car, d'après (3), les périodes de (4) ne dépendent pas de x. Nous pouvons donc écrire, en ayant préalablement fait une combinaison linéaire convenable

$$P\,dy + Q\,dy' = A\,d\lambda + B\,d\mu, \qquad R\,dy + S\,dy' = C\,d\lambda + D\mu,$$

A, B, C, D ne dépendant pas de x; et, par suite, en désignant par L,

M, N les valeurs de λ, μ, ν correspondant à Y, Y′, Y″, nous aurons

$$\int_{\lambda,\mu,\nu}^{L,M,N} A\,d\lambda + B\,d\mu = \alpha,$$

$$\int_{\lambda,\mu,\nu}^{L,M,N} C\,d\lambda + D\,d\mu = \beta.$$

Si, au lieu d'intégrer depuis (λ, μ, ν), nous intégrons depuis des valeurs arbitraires constantes λ_0, μ_0, ν_0, nous pourrons écrire

$$\int_{\lambda_0,\mu_0,\nu_0}^{L,M,N} A\,d\lambda + B\,d\mu = \alpha + G(x),$$

$$\int_{\lambda_0,\mu_0,\nu_0}^{L,M,N} C\,d\lambda + D\,d\mu = \beta + G_1(x).$$

L, M, N seront donc des fonctions uniformes quadruplement périodiques de

$$\alpha + G(x) \quad \text{et} \quad \beta + G_1(x),$$

et l'on aura par suite, en revenant à

$$Y = \varphi_1(x, L, M, N),$$

l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée.

Mais nous avons introduit deux fonctions $G(x)$ et $G_1(x)$, que nous ne connaissons pas encore; je dis que la recherche de ces fonctions se ramènera certainement à une quadrature. En effet, quand on passe d'une intégrale à une autre, les constantes α et β changent simplement. Donc, si nous posons *a priori*

$$Y = \varphi_1(x, L, M, N),$$
$$Y' = \varphi_2(x, L, M, N),$$
$$Y'' = \varphi_3(x, L, M, N),$$

L, M, N étant des fonctions quadruplement périodiques de u et v, en posant

$$u = \alpha + G(x), \qquad v = \beta + G_1(x),$$

nous aurons deux équations différentielles pour déterminer u et v, en écrivant que Y' et Y'' sont les dérivées premières et secondes de Y. Ces équations détermineront nécessairement u et v par de simples quadratures. Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

Sous les hypothèses faites, l'intégration de l'équation se ramène à des quadratures.

16. Examinons maintenant le cas où la surface ferait partie de la seconde classe. On pourra, dans ce cas, exprimer y, y' et y'' en fonction rationnelle d'un paramètre λ de θ et de $\sqrt{R(\theta)}$, $R(\theta)$ désignant un polynôme du quatrième degré en θ. Les rapports des périodes de l'intégrale de première espèce de la surface ne pouvant pas dépendre de x, les coefficients de $R(\theta)$ ne dépendent pas de x. Quant aux coefficients de λ, θ et $\sqrt{R(\theta)}$, nous pouvons les supposer fonctions algébriques de x. Nous pouvons remplacer θ et $\sqrt{R(\theta)}$ par $\varphi(u)$ et $\varphi'(u)$, φ étant une fonction doublement périodique de u. Cette lettre u représente l'intégrale de première espèce de la surface; par suite, en raisonnant comme plus haut, on verra que u est de la forme

$$G(x) + \alpha,$$

α étant une constante arbitraire. Il en résulte que la détermination de u, en fonction de x, se ramène à une quadrature; il reste à déterminer λ. On se trouve alors dans le cas des équations du premier ordre; λ sera donc donnée par une équation de Riccati.

17. J'indiquerai, en terminant, une équation différentielle curieuse, à laquelle conduit la théorie des fonctions elliptiques, et dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes.

Désignons par ω et ω' les périodes de la fonction elliptique $\operatorname{sn} x$, et soient a et b deux constantes arbitraires. L'expression

$$u = \operatorname{sn}(a\omega + b\omega'),$$

considérée comme fonction du module k, satisfait, quelles que soient les constantes a et b, à une équation différentielle du second ordre que nous allons former.

Posons

$$a\omega + b\omega' = y,$$

on aura

$$(1) \qquad k(1-k^2)\frac{d^2y}{dk^2} + \frac{dy}{dk}(1-3k^2) - ky = 0.$$

Soit

$$\Omega = \int_0^u \frac{dx}{\Delta x}, \qquad \Delta x = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

u étant supposé constant, on peut regarder Ω comme fonction de k. Elle satisfera à l'équation

$$(2) \quad k(1-k^2)\frac{d^2\Omega}{dk^2} + \frac{d\Omega}{dk}(1-3k^2) - k\Omega + \frac{ku(1-u^2)}{(1-k^2u^2)\Delta u} = 0.$$

L'égalité $u = \operatorname{sn}(a\omega + b\omega')$ revient à $\Omega = y$; on a

$$\frac{1}{\Delta u}\frac{du}{dk} + \frac{d\Omega}{dk} = \frac{dy}{dk},$$

$$\frac{d^2u}{dk^2}\frac{1}{\Delta u} - \left(\frac{du}{dk}\right)^2 \frac{u(2k^2u^2-1-k^2)}{\Delta u(1-u^2)(1-k^2u^2)} + 2\frac{du}{dk}\frac{ku^2}{\Delta u(1-k^2u^2)} + \frac{d^2\Omega}{dk^2} = \frac{d^2y}{dk^2}.$$

Dans ces égalités, les dérivées de Ω par rapport à k sont prises en laissant u constant. En multipliant les deux membres de ces trois égalités respectivement par $k(1-k^2)$, $1-3k^2$ et $-k$, puis ajoutant, nous avons immédiatement l'équation différentielle cherchée, en tenant compte de (1) et (2).

J'écris de suite cette équation, en remplaçant la variable k par $x = k^2$,

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \frac{u(2xu^2-1-x)}{(1-u^2)(1-xu^2)}$$
$$+ \frac{du}{dx}\left[\frac{u^2-1}{(1-x)(1-xu^2)} + \frac{1}{x}\right] - \frac{u(1-u^2)}{x(1-x)(1-xu^2)} = 0.$$

Les seuls points critiques des intégrales sont $x = 0, 1, \infty$.

Cette équation différentielle offre encore une particularité digne de

remarque : *elle admet une infinité d'intégrales algébriques.* Si l'on prend en effet pour a et b des nombres commensurables, l'intégrale correspondante sera une fonction algébrique de k^2; ces intégrales algébriques ne sont pas d'un degré déterminé : celui-ci peut être aussi grand qu'on voudra.

CHAPITRE VI.

SUR CERTAINES FONCTIONS DU POINT ANALYTIQUE (x, y, z).

1. Soit donc la courbe $f(x, y) = 0$.

Posons-nous la question suivante :

Trouver les fonctions $u(x, y)$, fonctions du point analytique (x, y), uniformes et régulières dans le voisinage de tout point de la surface de Riemann correspondant à f, et dont toutes les déterminations se déduisent d'une seule u par des substitutions linéaires de la forme

$$Au + B,$$

où A et B sont des constantes.

Parmi ces fonctions, considérons spécialement celles qui restent *toujours finies.* Il est évident qu'une telle fonction u satisfait à une relation de la forme

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda(x, y)\frac{du}{dx},$$

c'est-à-dire que les fonctions qui nous occupent sont de la forme

$$(1) \qquad \int e^{\int \lambda(x,y)dx} dx,$$

λ étant une fonction rationnelle de x et y. Étudions donc les expressions de la forme (1).

Je suppose, comme il est permis, que la courbe f n'a que des points doubles et ses directions asymptotiques distinctes. On peut aussi supposer que la fonction λ reste finie en chacun des points doubles, car on peut effectuer préalablement sur f une transformation birationnelle convenable, de façon à transformer les infinis de λ en des points simples.

Cela dit, envisageons les infinis de $\lambda(x,y)$. Soit d'abord (a, b) un infini pour lequel on n'ait pas $f'_b = 0$; a sera un pôle de $\lambda(x,y)$, et *son résidu devra être un entier positif*. Soit k le nombre des points (a, b), et désignons par

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots, \quad \alpha_k$$

les résidus (entiers positifs) correspondant à ces différents points.

Considérons maintenant les points de la courbe, pour lesquels $f'_y = 0$ [soit (x_1, y_1) un tel point], qui rendraient λ infini. On aura le développement

$$y - y_1 = H\sqrt{(x - x_1)} + \ldots;$$

donc $\lambda(x,y)$ se développera suivant les puissances de $(x - x_1)^{\frac{1}{2}}$, et ici les premiers termes du développement devront être

$$\frac{A_1}{(x - x_1)} + \frac{B_1}{(x - x_1)^{\frac{1}{2}}} + C_1 + \ldots$$

et A_1 devra être égale à $-\frac{1}{2}$ ou à un multiple positif de $\frac{1}{2}$.

Soit

$$A_1 = \frac{m_1}{2},$$

m_1 étant un *entier au moins égal à* -1.

Il nous reste à parler des points à l'infini; pour les m branches à l'in-

fini, le développement de $\lambda(x,y)$ suivant les puissances descendantes de x devra commencer par un terme en $\frac{1}{x}$, soit

$$\frac{R}{x} + \ldots$$

et R étant un entier au plus égal à -2.

Ainsi nous avons trois catégories de quantités

$$\alpha, \quad m, \quad R,$$

et l'on a entre elles la relation immédiate

$$\Sigma\alpha + \Sigma m_1 = \Sigma R.$$

ΣR est un entier au plus égal à $-2m$; les α sont des entiers positifs en nombre k. Enfin les lettres m sont en nombre

$$m(m-1) - 2d,$$

et chacune d'elles est un entier au moins égal à -1. On a donc

$$\Sigma R \leqq -2m, \quad \Sigma m_1 \leqq m(m-1) - 2d,$$

donc

$$\Sigma\alpha = \Sigma R - \Sigma m_1 \leqq m(m-3) - 2d.$$

Le nombre des points (a, b) est donc au plus égal à $m(m-3) - 2d$.

2. Nous pouvons, après ce qui précède, donner aisément la forme de la fonction rationnelle $\lambda(x,y)$. On aura

$$\lambda(x,y) = \frac{S(x,y)}{Q(x,y)(f'_y)^2};$$

$Q(x,y) = 0$ étant une courbe de degré k passant par les points doubles de f, la courbe $S = 0$ passera aussi par les points doubles de f, et ces derniers seront aussi pour S des points doubles. De plus, S sera un

polynôme de degré $k + 2m - 3$. Cherchons à déterminer S et Q de manière à réaliser le cas où le nombre des points (a, b) du paragraphe précédent atteint son maximum

$$m(m-3) - 2d \qquad \text{ou} \qquad 2p - 2,$$

en désignant par p le genre de f. Chacun des nombres m_1 sera alors égal à -1, et chacun des nombres R sera égal à -2.

Donnons-nous arbitrairement le polynôme $Q(x, y)$, sauf cette condition que la courbe $Q = 0$ passe par les points doubles de f. Ensuite, parmi les

$$mk - 2d$$

points de rencontre de Q et de f, choisissons S de manière que ce polynôme s'annule pour

$$mk - 2d - (2p - 2)$$

d'entre eux, et que pour les $2p - 2$ autres le résidu de λ soit $+1$. De plus, faisons en sorte que les d points doubles de f soient aussi des points doubles pour S. Ces diverses conditions seront en nombre

$$mk - 2d + 3d \qquad \text{ou} \qquad mk + d,$$

$S_1(x, y)$ étant un polynôme satisfaisant aux conditions précédentes; les autres seront de la forme

$$S_1(x, y) + A(x, y)Q(x, y),$$

$A(x, y)$ étant de degré $2m - 3$, et s'annulant pour les d points doubles.

Les points pour lesquels $f'_y = 0$ sont en nombre

$$m(m-1) - 2d.$$

Choisissons les A de manière que les résidus correspondants soient $-\frac{1}{2}$, ce qui fera $m(m-1) - 2d$ conditions.

$A_1(x,y)$ étant un de ces polynômes, les autres seront de la forme

$$A(x,y) = A_1(x,y) + \Theta(x,y) f'_y,$$

Θ étant de degré $m-2$.

Il reste à considérer les points à l'infini. Nous devons écrire que, pour les m branches à l'infini de la fonction algébrique y, la fonction rationnelle $\lambda(x,y)$ commence par un terme en $-\frac{2}{x}$. Or, soit dans Θ représenté par θ l'ensemble des termes homogènes de degré $m-2$; on en déduira, en désignant par $c_1, c_2, \ldots, c_m$ les m valeurs de $\frac{y}{x}$ pour x infini, les valeurs de

$$\theta(1, c_1), \quad \theta(1, c_2), \quad \ldots, \quad \theta(1, c_m),$$

mais on a seulement dans $\theta(x,y)$ un nombre de coefficients arbitraires égal à $m-1$; on pourra donc seulement disposer de $(m-1)$ des coefficients de $\frac{1}{x}$, correspondant à x très grand. Mais il est bien aisé de voir que *le dernier coefficient sera de lui-même égal à* -2.

Nous devons, en effet, avec les notations du paragraphe précédent, avoir

$$\Sigma\alpha + \Sigma m_1 = \Sigma R.$$

Désignons encore par R le dernier coefficient inconnu, dont nous n'avons pu disposer; la relation précédente donne

$$2p - 2 - [m(m-1) - 2d] = -2(m-1) + R.$$

On en conclut

$$R = -2.$$

Nous avons donc construit de cette manière la fonction $\lambda(x,y)$, de telle sorte que l'expression

$$\int e^{\int \lambda(x,y)dx} dx$$

réponde au problème proposé.

Nous avons, dans l'expression précédente de λ, fait figurer un polynôme arbitraire $Q(x,y)$ de degré k. Le nombre des paramètres arbitraires figurant dans λ n'en est pas moins, bien évidemment, essentiellement fini. On peut prendre pour Q la courbe de moindre degré, passant par les points doubles et les $2p-2$ points (a,b). Il serait d'ailleurs facile d'approfondir davantage la forme de la fonction λ, mais ceci n'est pas utile pour mon objet.

3. Cherchons ce que deviennent les fonctions précédentes, quand $p=1$. On aura d'abord, dans ce cas,

$$e^{\int \lambda dx} = \frac{Q(x,y)}{f'_y} e^{a\int \frac{Q dx}{f'_y}},$$

a désignant une constante et $\int \frac{Q(x,y)\,dx}{f'_y}$ représentant l'intégrale de première espèce.

Nous ne trouvons donc ici que l'expression bien simple

$$\int \frac{Q}{f'_y} e^{a\int \frac{Q dx}{f'_y}} dx,$$

expression qui, en posant

$$\int \frac{Q\,dx}{f'_y} = V,$$

devient

$$\int e^{aV} dV = \frac{1}{a} e^{aV},$$

si $a=0$, et qui se réduit à V si $a=0$; on aura ensuite l'expression

$$\int e^{aV} dx.$$

Si, p étant quelconque, on exprime x et y par des fonctions fuchsiennes d'un paramètre u, la fonction

$$\int e^{\int \lambda dx} dx$$

devient une fonction holomorphe $G(u)$ *dans le cercle fondamental*, et, en désignant par U une substitution quelconque du groupe fuchsien, on aura

$$G(U) = AG(u) + B,$$

A et B étant des constantes, et l'on doit remarquer que, pour toute substitution elliptique, on a $A = 1$, $B = 0$.

L'étude de ces fonctions, qu'on peut faire directement, ne serait pas sans intérêt; mais elle est étrangère à notre sujet, et je reviens aux fonctions algébriques de deux variables indépendantes.

4. Comment le problème traité par les courbes algébriques pourra-t-il s'étendre aux surfaces?

Étant donnée une surface $f(x, y, z) = 0$, les fonctions u du point (x, y, z), analogues aux fonctions du point (x, y) que nous venons d'étudier pour les courbes, satisferont aux conditions suivantes.

Quand (x, y, z) partant d'un point reviendra à ce point après avoir décrit un chemin se ramenant à un cycle nul, la fonction n'aura pas changé.

Si, au contraire, le chemin se ramène à un cycle linéaire effectif de la surface, la fonction u se transformera en

$$Au + B,$$

A et B étant des constantes.

Ces fonctions u pourront être de diverses espèces; les fonctions de première espèce analogues à celles des paragraphes précédents restent toujours finies.

La forme des fonctions u est facile à trouver. Tout d'abord on a évidemment

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\int M dx + N dy}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{\int M_1 dx + N_1 dy},$$

les expressions différentielles $M\,dx + N\,dy$ et $M_1\,dx + N_1\,dy$ étant des différentielles exactes; les M et N sont des fonctions rationnelles de x, y et z.

On aura donc pour u

$$(1) \qquad u = \int e^{\int M dx + N dy} dx + e^{\int M_1 dx + N_1 dy} dy.$$

Quelle sera maintenant la forme des fonctions M et N? En nous reportant à ce qui a été vu pour les courbes, on trouve que

$$M\,dx + N\,dy = \frac{P\,dx + Q\,dy}{R(f'_z)^2};$$

$R(x, y, z)$ est un polynôme de degré k en x, y, z, et de degré $k - 1$ en x et z; P et Q sont des polynômes : ils sont de degré $k + 2m - 3$ en x, y et z, mais le premier est seulement de degré $k + 2m - 4$ en x et z. Pareillement

$$M_1\,dx + N_1\,dy = \frac{P_1\,dx + Q_1\,dy}{R_1(f'_z)^2};$$

$R_1(x, y, z)$ est un polynôme de degré k_1 en x, y, z, et de degré $k_1 - 1$ en y et z; P_1 et Q_1 sont des polynômes : ils sont de degré $k_1 + 2m - 3$ en x, y et z, mais le second est seulement de degré $k_1 + 2m - 4$ en y et z.

Supposons, pour ne pas compliquer l'exposition, que la surface ait seulement pour singularités des lignes doubles. La surface $R = 0$ passera par les lignes doubles et coupera, en dehors de ces lignes, la surface f suivant deux courbes distinctes; l'une A de degré $m(m-2)$ avec m points à l'infini dans les plans $y =$ const., et une seconde courbe B. Les surfaces $P = 0$ et $Q = 0$ auront pour lignes doubles les lignes doubles de f, et passeront par la courbe B.

Semblablement, la surface $R_1 = 0$ passera par les lignes doubles de f, et coupera en dehors de ces lignes la surface f suivant deux courbes distinctes : l'une A_1 de degré $m(m-2)$ avec m points à l'infini dans les plans $x =$ const., et une seconde courbe B_1. Les surfaces $P_1 = 0$, $Q_1 = 0$ auront pour lignes doubles les lignes de f et passeront par la courbe B_1.

L'intégrale

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{R(f'_z)^2}$$

aura pour courbes logarithmiques la courbe A et les lignes (non multiples de la surface) ou $f'_z = 0$. L'intégrale relative à x seule

$$\frac{P\,dx}{R(f'_z)^2},$$

pour y arbitraire, devra rentrer dans le type de celles qui ont été étudiées aux paragraphes précédents pour les courbes planes.

Nous nous bornons à énoncer ces conditions; la vérification n'exige qu'un calcul un peu fastidieux. On part d'une expression générale telle que (1), et, comme on le fait au début de l'étude des intégrales abéliennes, on effectue sur x, y, z une substitution homographique générale. On voit alors, sans la moindre difficulté, que les différents polynômes remplissent les conditions indiquées au point de vue de leur degré. Quant aux conditions subséquentes, elles sont une conséquence directe de ce qui a été vu pour les courbes planes.

Il faudra, bien entendu, écrire en outre les conditions d'intégrabilité; or on pourra d'abord exprimer de suite la première exponentielle en fonction de la seconde et mettre l'expression sous la forme

$$u = \int e^{\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{R(f'_z)^2}} \left(dx + \frac{R_1 Q}{P_1 R}\,dy \right).$$

On aura ainsi à écrire seulement *deux* conditions d'intégrabilité, qui s'exprimeront par des relations algébriques entre les polynômes et leurs dérivées partielles.

On doit remarquer que les fractions rationnelles

$$\frac{P}{R},\quad \frac{Q}{R},\quad \frac{P_1}{R_1},$$

qui seules figurent dans u, ne devenant infinies à distance finie que pour les points d'une courbe de degré $m(m-2)$, et la différence entre les degrés des numérateurs et dénominateurs étant limitée en fonction de m, *le nombre des arbitraires figurant dans ces fractions rationnelles sera limité*, et, par suite, il n'y aura pas, en général, d'expressions u pour une surface algébrique, pas plus qu'il n'y a, en général, d'intégrales de première espèce, ce qui était d'ailleurs évident *a priori*, puisqu'il n'y aura pas alors de cycle linéaire.

4. Il me paraît prématuré de chercher à approfondir d'une manière générale l'étude des expressions u. Tel n'a pas été mon but; j'ai uniquement en vue ici de présenter quelques considérations sur le cas où *l'inversion d'un système de deux fonctions u conduirait à un système de fonctions uniformes.*

Concevons donc une surface $f(x, y, z) = 0$, possédant deux expressions u de première espèce

$$(1)\qquad \begin{cases} u = \displaystyle\int^{(x,y,z)} e^{\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{R(f_z')^2}} \left(dx + \frac{R_1 Q}{P_1 R}\,dy\right), \\ v = \displaystyle\int^{(x,y,z)} e^{\int \frac{P'\,dx + Q'\,dy}{R'(f_z')^2}} \left(dx + \frac{R_1' Q'}{P_1 R'}\,dy\right). \end{cases}$$

Pouvons-nous imaginer que x, y, z *soient des fonctions uniformes de u et v*?

Dans ce type se trouve compris, bien entendu, tout d'abord le cas de l'inversion de deux intégrales de première espèce, dont nous avons parlé longuement dans le Chapitre III de ce Mémoire.

D'une manière générale, étant données deux expressions u et v relatives à une certaine surface f, pourra-t-on reconnaître si les équations (1) donnent pour x, y, z des fonctions uniformes de u et v? C'est un problème que nous avons traité dans le cas où u et v sont des intégrales de première espèce; on peut encore employer les mêmes considérations; mais il s'en faut ici qu'elles nous donnent des conditions nécessaires et *suffisantes* : nous obtiendrons seulement ainsi des conditions *pour que x, y, z soient des fonctions à apparence uniforme.* C'est qu'en effet, dans le cas général, le domaine des variables u et v, où les fonctions x, y, z sont uniformes et se comportent comme des fractions rationnelles, n'est pas nécessairement l'ensemble des valeurs finies de u et v, mais il peut se trouver à distance finie une infinité de systèmes de valeurs des variables, *formant des singularités essentielles*, pour ces fonctions de u et v.

De nouveau se présente donc ici cette difficulté que nous avons déjà rencontrée dans le Chapitre précédent; on ne peut guère songer à l'aborder de front.

J'ai dit que la recherche des conditions, exprimant que les fonctions x, y, z sont *à apparence uniforme*, se faisait comme dans le cas

de l'inversion de deux intégrales de première espèce. Les valeurs de x, y, z pouvant donner prise à quelques difficultés sont évidemment celles qui annulent le déterminant fonctionnel de u et v, c'est-à-dire

$$e^{\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{R(t_z')^2}} \times e^{\int \frac{P'\,dx + Q'\,dy}{R'(t_z')^2}} \left(\frac{R_1'Q'}{P_1'R'} - \frac{R_1Q}{P_1R}\right).$$

Les courbes Γ, pour lesquelles cette expression s'annule, sont évidemment des courbes algébriques. Ici, comme dans le cas plus simple déjà cité et pour les mêmes raisons, *ces courbes devront être unicursales.*

Si cette condition est vérifiée, ces courbes satisferont aux équations

$$du = 0, \qquad dv = 0.$$

En effet, quand, dans une expression u de première espèce, on met à la place de x, y, z des fonctions rationnelles d'un paramètre, cette expression doit se réduire à une constante indépendante du paramètre, sinon elle ne pourrait rester toujours finie : u et v restent donc fixes quand x, y, z se déplace le long d'une courbe Γ; ces valeurs de u et v correspondent aux points d'indétermination des fonctions x, y, z.

On peut encore démontrer que le genre de la surface ne peut dépasser l'unité; c'est un cas particulier d'un théorème plus général que nous démontrerons à la fin de ce Chapitre.

5. Nous avons, dans ce qui précède, supposé que les fonctions u étaient de première espèce. On pourrait se proposer d'une manière générale l'étude des fonctions u, qu'on peut évidemment classer en trois espèces.

Arrêtons-nous un moment sur le cas d'une fonction u, relative à une courbe algébrique, et indiquons rapidement dans quel cas l'inversion de l'expression

$$(1) \qquad \int^{x,y} e^{\int^{x,y} \lambda(x,y)\,dx}\,dx = u$$

donne pour x et y des fonctions uniformes de u. Supposons d'abord que l'expression soit de première espèce. Dans ce cas, il ne devra y

avoir aucun infini (a, b), en gardant les notations du § I; nous aurons donc

$$\Sigma m_1 = \Sigma R.$$

Or, pour que l'inversion donne une fonction uniforme, il est nécessaire que toutes les quantités m_1 soient égales à -1, et que tous les R aient la valeur -2. Par suite,

$$-[m(m-1) - 2d] = -2m;$$

d'où l'on conclut

$$d = \frac{m(m-3)}{2}.$$

La courbe sera, par suite, de genre un. On voit alors aisément que u se réduit, soit à l'intégrale de première espèce, soit à

$$e^{av},$$

v désignant l'intégrale de première espèce. Les fonctions inverses résultant de (1) sont donc des fonctions doublement périodiques, ou des fonctions doublement périodiques de la combinaison linéaire

$$A \log u + B,$$

A et B étant des constantes.

Affranchissons-nous maintenant de l'hypothèse que u est une expression de première espèce.

Supposons d'abord que u soit une expression de *seconde espèce*. Il est manifeste qu'elle ne peut avoir qu'un seul pôle, si l'inversion se fait d'une manière uniforme; en effet, dans le cas contraire, à des valeurs très grandes de u correspondraient plusieurs valeurs de (x, y). Ceci posé, les quantités α du § I seront nulles, *sauf une* qui sera égale à -2; on aura donc, d'après la relation

$$\Sigma\alpha + \Sigma m_1 = \Sigma R,$$

$$-2 - [m(m-1) - 2d] = -2m,$$

d'où l'on conclut que

$$d = \frac{(m-1)(m-2)}{2},$$

c'est-à-dire que la courbe est unicursale. Remplaçant alors dans u les coordonnées x et y par leur valeur en fonctions rationnelles du paramètre θ, on voit que θ ne pourra être qu'une fraction rationnelle de u; donc x et y seront des fractions rationnelles de u.

Supposons enfin que u soit une expression de *troisième espèce*, c'est-à-dire que son développement dans le voisinage de certains points renferme des termes logarithmiques. On peut d'ailleurs supposer que les points où u devient infinie sont distincts des points doubles et de ceux où $f'_y = 0$. On montrera d'abord qu'il ne peut y avoir de pôles, et que la fonction u ne peut devenir infinie qu'en deux points (x_1, y_1), (x_2, y_2), la partie devenant infinie se réduisant respectivement pour les deux points à

$$A \log(x - x_1) \quad \text{et} \quad -A \log(x - x_2).$$

La démonstration de cette remarque, qui facilite singulièrement la discussion, est immédiate, car on voit de suite que, dans toute autre hypothèse, à de très grandes valeurs de u correspondent plusieurs valeurs de (x, y).

Si nous revenons maintenant aux notations du § I, il n'y aura que deux α différents de zéro, et leur valeur commune sera -1. Nous aurons donc, toujours d'après la même relation,

$$-1 - 1 - [m(m-1) - 2d] = -2m,$$

c'est-à-dire que, comme plus haut, la courbe est unicursale.

Remplaçant alors dans u les coordonnées x et y par leur valeur en fonctions rationnelles du paramètre θ, nous aurons à faire l'inversion d'une intégrale de différentielle algébrique ayant deux infinis logarithmiques; donc θ et par suite x et y seront des fonctions rationnelles de e^{au}, a étant une constante.

6. La considération des groupes kleinéens, dont les substitutions

sont de la forme

$$(1) \qquad (u, au + b),$$

conduirait à des résultats plus généraux que ceux qui viennent d'être trouvés dans le paragraphe précédent. A chacun de ces groupes correspondra une relation algébrique

$$f(x, y) = 0,$$

et les coordonnées (x et y) d'un point de cette courbe, fonctions kleinéennes du paramètre u, pourront être considérées comme provenant de l'inversion d'une équation de la forme

$$u = \int e^{\int \lambda dx} dx,$$

λ étant une fonction rationnelle de x et y. Mais ici la fonction u du point analytique (x, y) ne sera pas nécessairement ramifiée comme la fonction y de x définie par l'équation f.

Quant aux groupes kleinéens dont les substitutions sont de la forme (1), ils se ramènent à des types bien connus, et leur recherche est si facile qu'il est inutile de nous y arrêter.

7. Pareillement, en passant de une à deux variables u et v, il sera intéressant de faire la recherche des groupes discontinus dont les substitutions sont de la forme

$$(u, v, au + b, cv + d),$$

les (a, b, c, d) étant des constantes.

Mais ici se présentera une difficulté qui ne s'est pas rencontrée dans le cas d'une seule variable; car, en supposant obtenu un tel groupe, la question suivante se pose : Existe-t-il des fonctions invariables par les substitutions de ce groupe? D'une manière générale même, la réponse est négative, comme le montre l'exemple des fonctions ayant quatre paires de périodes.

Dans le cas où a, b, c, d sont réels, a et c étant positifs, la recherche

des groupes précédents n'offrira pas de très grandes difficultés. Dans cette hypothèse en effet, les groupes discontinus précédents rentrent dans ce type de groupes, relatifs à deux variables indépendantes, et que j'ai désignés sous le nom de *groupes hyperabéliens* (*Journal de Mathématiques*, 1885). Donnons-en un exemple.

En se reportant au Mémoire cité, on voit qu'à chaque forme quadratique quaternaire réelle

$$f(x, y, z, t)$$

de discriminant différent de zéro, et appartenant au type

$$U_1^2 + U_2^2 - U_3^2 - U_4^2,$$

correspond un groupe hyperabélien. Ne considérons ici dans un tel groupe que le seul sous-groupe formé des substitutions de la forme

$$(2) \qquad (u, v, au + b, cv + d),$$

nous aurons ainsi engendré un groupe discontinu du type cherché. Prenons, comme application, la forme suivante

$$f(x, y, z, t) = x^2 - Dy^2 - zt,$$

D désignant un entier positif quelconque.

Nous obtiendrons, dans ce cas particulier, le groupe correspondant de la manière suivante. Concevons les quatre lettres x, y, z, t liées par la relation

$$x^2 - Dy^2 - zt = 0.$$

Posons

$$u = \frac{x - y\sqrt{D}}{z}, \qquad v = \frac{-x - y\sqrt{D}}{z}.$$

Soit maintenant une substitution linéaire quelconque, à coefficients entiers, transformant en elle-même la forme f; x, y, z, t deviendront X, Y, Z, T et posons alors

$$U = \frac{X - Y\sqrt{D}}{Z}, \qquad V = \frac{-X - Y\sqrt{D}}{Z};$$

U et V seront des fonctions linéaires de u et v, fractionnaires en général. Nous ne prenons ici, parmi ces substitutions, que celles qui sont de la forme (2).

C'est ainsi que nous trouvons les substitutions

$$(U, V, u+1, v-1),$$
$$(U, V, u-\sqrt{D}, v-\sqrt{D}),$$
$$[U, V, (a-c\sqrt{D})u, (a+c\sqrt{D})v].$$

Dans cette dernière, a et c désignent deux entiers positifs satisfaisant à l'équation de Pell, $a^2 - Dc^2 = 1$. Le groupe admettant ces substitutions fondamentales est un groupe discontinu.

8. Que pouvons-nous dire maintenant des fonctions restant invariables par les substitutions des groupes discontinus dont nous venons de parler? En se bornant au cas où le groupe est du type hyperabélien, on peut recourir aux séries dont j'ai fait usage dans l'étude des fonctions hyperabéliennes; mais, dans le cas actuel, il s'en faut que nous puissions en tirer le même parti.

Nous devons d'abord remplacer le domaine des (u, v), où les coefficients de i (pour u et pour v) sont positifs, par deux cercles de rayon un, ce que donneront les transformations

$$\xi = \frac{u-i}{u+i}, \qquad \eta = \frac{v-i}{v+i}.$$

Au groupe précédent correspond alors un certain groupe

$$\left(\xi, \eta, \frac{A\xi+B}{C\xi+D}, \frac{A'\eta+B'}{C'\eta+D'}\right), \qquad AD - BC = A'D' - B'C' = 1.$$

Prenant alors une fraction rationnelle $R(\xi, \eta)$, qui reste finie à l'intérieur des cercles et sur leur circonférence, c'est la fonction

$$\Sigma R\left(\frac{A\xi+B}{C\xi+D}, \frac{A'\eta+B'}{C'\eta+D'}\right) \frac{1}{(C\xi+D)^{2m}(C'\eta+D')^{2m}} \qquad (m \geq 2),$$

(la sommation étant étendue à toutes les substitutions du groupe),

qui conduit aux fonctions restant invariables par les substitutions du groupe.

Si nous revenons aux variables u et v, les fonctions que nous obtenons ainsi se trouvent seulement définies pour les valeurs des variables

$$u = u' + iu'', \qquad v = v' + iv'',$$

qui correspondent à

$$u'' > 0, \qquad v'' > 0.$$

Dans les cas que j'ai autrefois étudiés, cela suffisait; car les fonctions étaient nécessairement limitées à ce domaine et ne pouvaient s'étendre au delà. Avec nos groupes actuels, il en est tout autrement; le domaine possible n'est pas *a priori* limité, mais les développements en séries, qui précèdent, ne peuvent être employés sans examen préalable, quand on n'a plus

$$u'' > 0, \qquad v'' > 0.$$

Nous ne pouvons donc décider s'il existe ou non des fonctions restant invariables par les substitutions du groupe considéré. Les fonctions, bien entendu, ne doivent pas avoir d'autres singularités essentielles que celles qui appartiennent au groupe lui-même. Malgré de longues recherches sur ce sujet, il m'a été impossible d'arriver à des résultats précis, si ce n'est dans des cas particuliers, d'ailleurs intéressants, que j'étudierai dans un autre travail.

9. Nous terminerons en démontrant un théorème auquel nous avons déjà fait précédemment allusion (n° 4). Si les coordonnées x, y, z d'un point quelconque d'une surface s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres u et v, restant invariables pour un groupe de substitutions de la forme

$$(u, v, au + b, cv + d),$$

et que le domaine fondamental de ce groupe soit tout entier à distance finie, sans singularité essentielle des fonctions sur sa surface, *le genre de la surface ne pourra dépasser l'unité.*

Soit une intégrale double de première espèce

$$\int\int \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

en remplaçant x, y, z par leur valeur en u et v, nous aurons

$$\int\int G(u, v)\, du\, dv,$$

en posant

$$G(u, v) = \frac{Q(x, y, z)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)}{f'_z}.$$

La fonction $G(u, v)$ sera holomorphe dans le domaine fondamental. En posant

$$U = au + b, \qquad V = cv + d,$$

on aura

$$G(U, V) = \frac{1}{ac} G(u, v).$$

Or écrivons

$$G(u, v) = e^{\Phi};$$

il en résulte que

$$\Phi = \int \frac{G'_u}{G} du + \frac{G'_v}{G} dv = \int P\, dx + Q\, dy.$$

P et Q étant des fonctions rationnelles de x, y et z. On a donc

$$G(u, v) = e^{\int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} P\, dx + Q\, dy}.$$

L'exponentielle qui est dans le second membre doit donc rester finie pour tout point (x, y, z) de la surface; d'où cette conséquence, que l'intégrale

$$(1) \qquad \int P\, dx + Q\, dy$$

est une intégrale de première espèce. Ainsi, à chaque intégrale double

de première espèce correspond une intégrale de différentielle totale de première espèce. Lorsque (x, y, z) décrira un cycle correspondant à la substitution

$$(u, v, au + b, cv + d),$$

l'intégrale s'augmentera de

$$-\log(ac) + 2k\pi i,$$

k étant un entier.

S'il existe donc *deux* intégrales doubles de première espèce, il y correspondra deux intégrales de première espèce

$$\int P\,dx + Q\,dy \quad \text{et} \quad \int P_1\,dx + Q_1\,dy;$$

la différence de ces deux intégrales

$$\int (P - P_1)\,dx + (Q - Q_1)\,dy$$

sera une intégrale de première espèce, n'ayant que la période $2\pi i$. Or ceci est impossible, car une intégrale de première espèce doit avoir au moins *deux* périodes distinctes. *Le genre de la surface ne peut donc dépasser l'unité.*

TABLE DES MATIÈRES

DU MÉMOIRE DE M. E. PICARD.

Pages.

INTRODUCTION 135

CHAPITRE I. — *Intégrales de différentielles totales* 140
I. — Généralités 140
II. — Réduction des intégrales de seconde espèce ..... 1[illegible]
III. — Intégrales de troisième espèce 163

CHAPITRE II. — *Sur les cycles dans les surfaces algébriques* 170
I. — Sur la transformation des cycles d'une surface de Riemann dépendant d'un paramètre arbitraire 170
II. — Sur les cycles linéaires des surfaces algébriques 175
III. — Propositions générales sur les intégrales de seconde et de troisième espèce 182
IV. — Sur les cycles à deux dimensions dans les surfaces algébriques 189
V. — Digression sur les fonctions de trois variables complexes 195

CHAPITRE III. — *Transformation des surfaces en elles-mêmes* 199
I. — Théorème sur la transformation des surfaces 199
II. — Surfaces de genre supérieur à un admettant un faisceau de transformations 205
III. — Surfaces du genre zéro et un ..... 21[illegible]
IV. — Surfaces rentrant dans la seconde catégorie; cas où les intégrales ont quatre périodes 223
V. — Cas où les intégrales ont trois périodes 233
VI. — Cas où les intégrales ont moins de trois périodes 247

CHAPITRE IV. — *Correspondance entre deux surfaces* 250
I. — Surfaces de genre supérieur à un, admettant une série infinie discontinue de substitutions birationnelles 250
II. — Sur la correspondance point par point de deux surfaces données 257

CHAPITRE V. — *Quelques applications aux équations différentielles* 263
I. — Généralités 263
II. — Recherche de l'intégrale 269
III. — Examen du cas général 277
IV. — Quelques remarques générales 291

CHAPITRE VI. — *Sur certaines fonctions du point analytique* (x, y, z) 300

Sur la détermination générale du volume engendré par un contour fermé gauche ou plan dans un mouvement quelconque ;

Par M. G. KOENIGS,

Maître de Conférences à l'École Normale supérieure et à la Sorbonne.

Tout le monde connaît les belles propositions sur les corps de révolution auxquelles est attaché le nom de Guldin. On a cru, il est vrai, pouvoir lire un énoncé de ces théorèmes dans un passage obscur des *Collections* de Pappus, mais c'est Guldin qui paraît en avoir donné, le premier, sinon une démonstration satisfaisante, au moins un énoncé suffisamment précis.

Au début de ces recherches, je m'étais proposé de trouver une extension du théorème de Guldin qui concerne le volume, en supposant qu'un contour fermé quelconque, donné, accomplît une révolution complète autour d'une droite de l'espace. Le volume engendré devait être naturellement une fonction des coordonnées de l'axe de rotation (une *fonction de droite*). Je fus ainsi conduit à reconnaître que la théorie des segments de Möbius s'imposait, en quelque sorte, dans la solution de ce problème, et qu'elle en fournissait la solution la plus rationnelle et la plus simple. En cherchant ensuite à étendre mon étude au cas d'un mouvement quelconque, je me vis encore forcé de faire un nouvel appel à cette même théorie, pour la représentation du mouvement, en sorte que, grâce à la doctrine de Mobius, tout ce

qui a trait aux volumes engendrés par un contour fermé de forme invariable se trouve compris dans une proposition unique, simple, immédiatement compréhensible.

Cette double intervention de la théorie de Möbius m'a paru d'autant plus digne d'intérêt qu'on ne lui avait pas, jusqu'ici, trouvé d'emploi, en dehors des deux applications classiques de la Statique et de la Cinématique du corps solide, pour lesquelles, à vrai dire, Möbius l'avait justement créée.

Il m'a semblé important, pour la théorie de Möbius, de prouver qu'elle ne se borne pas à ces deux applications, qu'elle n'est pas stérile et propre uniquement à satisfaire un esprit philosophique; mais, au contraire, qu'elle s'impose dans telles questions qui ne pourraient trouver en dehors d'elle leur solution naturelle.

Cette considération m'a décidé à développer ici cette application nouvelle de la doctrine de Möbius.

I. — Énoncé du problème.

Il me semble convenable d'expliquer au début ce que j'entends par volume engendré par un contour fermé dans un mouvement quelconque. Dans le cas général, en effet, le contour fermé mobile engendre une sorte de surface-canal ouverte aux deux bouts, et l'on n'aperçoit pas ce qu'il faut entendre par le mot *volume*. Pour lever cette difficulté, concevons que l'on ait tendu une cloison sur le contour fermé; le volume engendré par le contour sera celui que cette cloison aura balayé.

Quant à la valeur du volume ainsi défini, elle se trouve indépendante de la cloison choisie; car, changer la cloison T et la remplacer par une autre T′, également tendue sur le contour, cela revient à transporter d'une extrémité à l'autre du volume l'onglet compris entre les deux cloisons T, T′, et dont le contour proposé forme l'arête. On voit donc que le volume possède une valeur indépendante du choix de la cloison. Cette valeur ne dépend que du contour; et c'est à juste titre que nous considérons le volume comme engendré par le contour.

Au surplus, les développements ultérieurs démontreront en toute

rigueur l'indifférence du choix de la cloison, dont je ne puis ici que faire comprendre approximativement l'origine.

II. — Axe aréolaire.

La solution précise du problème exige, en effet, quelques explications préliminaires que je vais exposer.

Il est d'abord nécessaire, en vue de la fixation des signes, de supposer que le contour est doué d'un sens de parcours donné *a priori*. Dans certaines questions, notamment dans celles qui ont trait aux aires, on est assujetti déjà à cette nécessité.

Soient un plan orienté Π [1] et un contour fermé $\mathfrak{C}$, doué d'un sens de parcours. On sait que la projection du contour sur le plan Π a une aire parfaitement définie en grandeur et signe, qui a pour valeur

$$A\alpha + B\beta + C\gamma, \tag{1}$$

en supposant que α, β, γ soient les cosinus directeurs de l'orientation. Quant à A, B, C, ce sont les aires (prises avec leurs signes) des projections du contour sur les plans de coordonnées. Ainsi l'on a

$$\left\{\begin{aligned} A &= \int y\,dz = -\int z\,dy = \tfrac{1}{2}\int(y\,dz - z\,dy),\\ B &= \int z\,dx = -\int x\,dz = \tfrac{1}{2}\int(z\,dx - x\,dz),\\ C &= \int x\,dy = -\int y\,dx = \tfrac{1}{2}\int(x\,dy - y\,dx),\end{aligned}\right. \tag{2}$$

les intégrales étant prises le long du contour $\mathfrak{C}$, parcouru dans le sens qui lui appartient.

Considérons un segment, dont la position sera indéterminée dans l'espace, mais dont A, B, C seront les projections sur les axes de coor-

---

[1] On appelle *plan orienté* un plan sur les normales duquel un sens de parcours est fixé. Les cosinus directeurs α, β, γ relatifs à ce sens de parcours fixent l'orientation du plan; on peut les appeler les *cosinus directeurs de l'orientation*. J'appelle *axe d'orientation* une quelconque des normales au plan, décrite dans le sens de l'orientation, par exemple celle qui passe à l'origine.

données; la formule (1) fait voir que, pour avoir l'aire du contour sur un plan orienté quelconque, il suffira de projeter ce segment sur l'axe d'orientation du plan, en affectant la longueur du segment du signe + ou —, selon qu'il aura le sens de l'axe d'orientation du plan ou le sens opposé.

Je donnerai abréviativement le nom d'*axe aréolaire* du contour à ce segment dont la simple projection sur un axe suffit pour représenter en grandeur et en signe l'aire de la projection du contour sur tout plan orienté par cet axe.

III. — La formule de Stokes.

Considérons toujours un contour fermé $\mathfrak{C}$ doué d'un sens de parcours, et tendons une cloison T sur ce contour; puis, décomposons cette cloison en éléments superficiels infiniment petits ω. Chacun de ces éléments superficiels est limité par un contour fermé infiniment petit, et je vais montrer que la propriété du contour $\mathfrak{C}$ d'avoir un sens de parcours se transmet à tous les contours élémentaires dans lesquels la cloison a été décomposée.

Soient, en effet, M un point de la cloison T et MM′, MM″ deux segments égaux à une même quantité constante h, aussi petite qu'on voudra, portés de part et d'autre de M sur la normale à la cloison au point M. Lorsque ce point M décrit la cloison, les points M′ et M″ décrivent deux surfaces T′ et T″ parallèles à la cloison et limitées respectivement par les deux contours $\mathfrak{C}'$ et $\mathfrak{C}''$ que l'on obtient lorsque le point M décrit le contour $\mathfrak{C}$ lui-même.

Prenons le point M, de sorte qu'il soit infiniment voisin d'un point P du contour $\mathfrak{C}$, et menons la tangente en P au contour dans le sens de ce contour; sur la normale en M à la cloison, il y a un sens qui est dextrorsum avec le sens de cette tangente; supposons que ce soit le sens MM′, qui va de T à la surface T′. Nous dirons que la surface T′ est à droite de la cloison T′; la surface T″ sera, au contraire, à gauche de cette cloison.

Si, au lieu du point P du contour $\mathfrak{C}$, on avait pris un autre point Q de ce même contour, et puis un point M voisin de Q sur la cloison T,

et que l'on eût effectué les mêmes constructions, on aurait évidemment été conduit à donner le nom de droite de la cloison T encore à la surface T′, et de gauche à la surface T″, en sorte que la définition est indépendante, au fond, du point P pris sur le contour. On s'en assure aisément par voie de continuité, en déplaçant le point M sur une courbe tracée sur la cloison T, et infiniment voisine de l'arc PQ du contour Θ.

Il est clair que, si l'on change le sens de parcours du contour Θ, la droite et la gauche de la cloison T se permutent.

Ceci posé, prenons un point M de la cloison T, et soit ω un élément superficiel qui entoure le point M; élevons en M la normale à la cloison T vers la *droite de cette cloison;* soit MN cette normale. Des deux sens de parcours qu'on peut attribuer au contour élémentaire ω, il en est un qui est dextrorsum avec MN : c'est ce sens que j'attribue au contour ω.

Tout contour élémentaire ω se trouve ainsi doué d'un sens de parcours déterminé, et ce sens change avec celui qui est donné sur le contour total Θ.

Maintenant désignons par ξ, η, ζ les cosinus directeurs de la normale *droite* MN et par u, v, w trois fonctions arbitraires des coordonnées x, y, z; on a la formule suivante, attribuée à Stokes,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\int(u\,dx + v\,dy + w\,dz) \\ &\quad = \int\int\left[\xi\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \eta\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \zeta\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\omega; \end{aligned}\right.$$

l'intégrale simple est prise, suivant le contour, dans le sens qui lui appartient, et l'intégrale double s'étend à tous les éléments ω. Ajoutons que, dans cette intégrale double, ω représente la valeur de l'aire élémentaire du contour ω, qui est assimilable à une aire plane.

Comme application de cette formule de Stokes, cherchons la somme des aires des projections de tous les contours ω sur un plan H, dont α, β, γ seront les cosinus directeurs de l'orientation.

Il faut observer que l'axe aréolaire du contour ω (assimilable à un contour plan) n'est autre qu'une longueur égale à ω, portée sur la normale MN. D'après un théorème bien connu sur la projection des aires

planes, l'aire de projection sur le plan H du contour ω aura donc la valeur suivante

$$(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)\omega;$$

d'où, pour la somme de toutes ces projections,

$$\int\int(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)\omega.$$

Or prenons, dans la formule de Stokes,

$$u = \frac{\beta z - \gamma y}{2}, \qquad v = \frac{\gamma x - \alpha z}{2}, \qquad w = \frac{\alpha y - \beta x}{2},$$

et nous aurons

$$\int \alpha \frac{y\,dz - z\,dy}{2} + \beta \frac{z\,dx - x\,dz}{2} + \gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{2}$$
$$= \int\int(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)\omega,$$

c'est-à-dire, d'après les équations (2),

$$= A\alpha + B\beta + C\gamma.$$

On voit donc que la somme des aires des projections de tous les éléments ω sur un plan H orienté, quelconque, est indépendante de la cloison T choisie et est égale à l'aire de la projection du contour sur ce plan.

C'est à dessein que j'ai rattaché cette remarque bien connue au théorème de Stokes, car une remarque toute pareille va me conduire à la solution du problème que je me suis proposé.

IV. — Volume de translation.

Il importe d'abord de fixer le signe des volumes et d'introduire à cet effet une convention. L'étude des volumes de translation nous en fournira l'occasion.

Supposons d'abord que le contour subisse une translation rectiligne

dont je représenterai par u, v, w les composantes suivant trois axes rectangulaires liés au contour.

Les cosinus directeurs de cette translation seront

$$\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}},\quad \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}},\quad \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}},$$

et $\sqrt{u^2+v^2+w^2}$ représentera son amplitude.

Concevons une cloison T tendue sur le contour; chaque élément ω de cette cloison décrira un élément cylindrique dont la section droite sera précisément la projection du contour ω sur le plan Π dont

$$\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}},\quad \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}},\quad \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$$

sont les cosinus directeurs de l'orientation; la valeur absolue de cette section droite sera donc égale à la valeur absolue de l'expression

$$\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\xi+\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\eta+\frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\zeta\right)\omega,$$

où ξ, η, ζ sont les cosinus directeurs de la normale MN à la cloison définie comme précédemment. Pour avoir le volume, il suffira de multiplier la section droite par la hauteur $\sqrt{u^2+v^2+w^2}$. Quant au signe, *je conviens expressément d'adopter celui même de l'aire de la projection du contour ω sur le plan* Π.

Le volume balayé par l'élément ω aura dès lors en grandeur *et signe* la valeur suivante

$$(u\xi+v\eta+w\zeta)\omega.$$

Le volume engendré par la cloison T sera la somme des volumes balayés par chaque élément, ce qui donne, pour le volume intégral,

$$\int\int(u\xi+v\eta+w\zeta)\omega.$$

Or on aperçoit tout de suite, d'après l'application déjà faite du

théorème de Stokes, que cette intégrale a la valeur suivante

$$(4) \qquad Au + Bv + Cw;$$

où A, B, C ont la signification que leur attribuent les formules (2).

Je ne m'arrêterai pas à montrer que la formule (4) s'étend au cas d'une translation non rectiligne, à condition que u, v, w représentent les projections de la corde qui sous-tend l'arc de la courbe directrice du mouvement de translation.

Je passe immédiatement au cas d'un déplacement hélicoïdal.

V. — Volume hélicoïdal.

J'observe d'abord que, pour une même hélice directrice, les volumes hélicoïdaux engendrés par un même contour sont entre eux comme les amplitudes des rotations effectuées autour de l'axe de l'hélice. Il suffit donc d'étudier le cas d'un déplacement hélicoïdal infiniment petit.

Je représente par p, q, r les composantes de la vitesse de rotation, le temps étant pris pour variable indépendante, et par a, b, c les composantes de la vitesse de l'origine; le tout en supposant que *les axes de coordonnées soient liés invariablement au contour*. La vitesse d'un point x, y, z lié au contour aura pour composantes

$$\begin{aligned} V_x &= a + qz - ry, \\ V_y &= b + rx - pz, \\ V_z &= c + py - qx; \end{aligned}$$

il suffirait de multiplier par dt pour avoir le déplacement même du point (x, y, z).

Considérons maintenant une cloison T tendue sur le contour, et un élément ω de cette cloison, décrit autour d'un point $M(x, y, z)$. Le volume balayé par l'élément ω est assimilable au volume qu'il engendrerait dans une translation égale et parallèle au déplacement $V_x\,dt$, $V_y\,dt$, $V_z\,dt$ du point M. Ce volume, d'après le numéro précédent, a

donc pour valeur en grandeur et en signe

$$(V_x\xi + V_y\eta + V_z\zeta)\omega\, dt,$$

et le volume balayé par toute la cloison est la somme des volumes balayés par tous les éléments, c'est-à-dire

$$\int\int(V_x\xi + V_y\eta + V_z\zeta)\omega\, dt.$$

Or posons, dans la formule de Stokes,

$$u = \frac{bz - cy}{2} - p\frac{y^2 + z^2}{2},$$

$$v = \frac{cx - az}{2} - q\frac{z^2 + x^2}{2},$$

$$w = \frac{ay - bx}{2} - r\frac{x^2 + y^2}{2},$$

et nous trouvons

$$V_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \qquad V_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad V_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

L'intégrale qui représente le volume se transforme donc dans l'intégrale simple, prise le long du contour,

$$dt\int\left[\left(\frac{bz - cy}{2} - p\frac{y^2 + z^2}{2}\right)dx + \left(\frac{cx - az}{2} - q\frac{z^2 + x^2}{2}\right)dy \right.$$
$$\left. + \left(\frac{ay - bx}{2} - r\frac{x^2 + y^2}{2}\right)dz\right].$$

Posons, outre les équations (2), les suivantes

$$(2') \qquad \left\{\begin{aligned} L &= -\int\frac{y^2 + z^2}{2}\,dx, \\ M &= -\int\frac{z^2 + x^2}{2}\,dy, \\ N &= -\int\frac{x^2 + y^2}{2}\,dz, \end{aligned}\right.$$

et nous arrivons finalement à cette expression du volume

$$(5) \qquad (\mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c + \mathrm{L}p + \mathrm{M}q + \mathrm{N}r)\,dt.$$

Cette formule est fondamentale, je vais l'interpréter.

VI. — Système de segments attaché au contour.

On sait qu'un système de segments rapporté à trois axes rectangulaires a pour coordonnées les sommes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ des projections des segments qui le composent sur les axes de coordonnées, et les moments résultants $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, pris par rapport à ces mêmes axes.

Si l'on fait la somme géométrique de tous les segments du système, le segment qui figure cette somme, et qu'on nomme la *résultante de translation* du système, a pour projections $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et, par conséquent, sa longueur est égale à

$$(6) \qquad \sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}.$$

Chasles a démontré que si par voie de glissement des segments sur leurs lignes d'action, ou par voie de composition et de décomposition, on transforme un système en un autre, qui lui est, comme on sait, *equivalent*, les tétraèdres construits sur les segments du premier système pris deux à deux, avec des signes convenables, ont une somme égale à la somme analogue que l'on obtiendrait avec le second système de segments, équivalent au premier. Cette somme doit donc s'exprimer à l'aide des coordonnées $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, et l'on sait en effet qu'elle a pour valeur le sixième de l'expression

$$(7) \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{L} + \mathfrak{B}\mathfrak{M} + \mathfrak{C}\mathfrak{N}.$$

Cette expression est donc un invariant du système de segments, de même que la somme $\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2$ qui représente le carré de la résultante de translation. Le rapport

$$(8) \qquad h = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{L} + \mathfrak{B}\mathfrak{M} + \mathfrak{C}\mathfrak{N}}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}$$

est donc également un invariant du système de segments.

Le théorème de Chasles est susceptible d'une extension, dans laquelle on considère simultanément deux systèmes de segments $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$; $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}'$. Construisons de toutes les façons possibles un tétraèdre en prenant un segment dans un système et un segment dans l'autre, la somme des tétraèdres ainsi obtenus et affectés d'un signe convenable est égale au sixième de l'expression

$$(9) \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{L}' + \mathfrak{B}\mathfrak{M}' + \mathfrak{C}\mathfrak{N}' + \mathfrak{L}\mathfrak{A}' + \mathfrak{M}\mathfrak{B}' + \mathfrak{N}\mathfrak{C}'.$$

Cette expression constitue donc un *invariant simultané* des deux systèmes : on lui donne le nom de *moment* des deux systèmes.

Si les deux systèmes se réduisent chacun à un segment, le moment est égal au sextuple du tétraèdre construit sur ces deux segments.

Parmi tous les systèmes de segments que l'on peut imaginer et qui forment une sextuple infinité, je considère particulièrement ceux pour lesquels la résultante de translation est égale à l'unité ; je donnerai à ces systèmes de segments unitaires le nom de *vis*, pour adopter une locution employée par M. Ball, dans ses recherches sur la dynamique des corps solides.

Soit un système de segments

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{L},\ \mathfrak{M},\ \mathfrak{N}:$$

si l'on divise par $\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}$ toutes les coordonnées de ce système, on obtient les coordonnées d'une vis

$$(10) \qquad \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}},\quad \frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}},\quad \ldots,\quad \frac{\mathfrak{N}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}}.$$

Nous dirons d'une telle vis qu'*elle porte* le système de segments. D'après cela, tout système de segments peut être représenté par les coordonnées α, β, γ, λ, μ, ν de la vis qui le porte, et par son *module*, qui ne sera autre que la longueur $\mathfrak{P}$ de sa résultante de translation.

Si l'on se reporte à l'expression (8) de l'invariant h, on voit que h ne dépend pas du module du système, mais seulement de la vis qui le porte; en introduisant les coordonnées α, β, γ, λ, μ, ν de cette vis, on

trouve, puisque $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$,

$$h = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu. \tag{10}$$

Cette quantité h est le *pas* de la vis.

Si le pas est nul, la vis se réduit simplement à un axe, et le système de segments est réductible à un segment unique. Les axes de l'espace sont donc des vis de pas nul; on peut encore dire que ce sont des segments dont la longueur est l'unité.

Pour qui connaît les principes de la théorie de Mobius, ces définitions ne peuvent présenter de difficultés. Les vis portent les systèmes de segments, de même que les axes portent les segments eux-mêmes.

On voit dès lors ce qu'il faudra entendre par moment d'un segment ou d'un système de segments par rapport à une vis; si $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sont les coordonnées du système de segments, α, β, γ, λ, μ, ν celles de la vis, ce moment aura l'expression suivante

$$\mathfrak{A}\lambda + \mathfrak{B}\mu + \mathfrak{C}\nu + \mathfrak{L}\alpha + \mathfrak{M}\beta + \mathfrak{N}\gamma. \tag{11}$$

Si la vis se réduit à un axe, on retombe tout simplement sur le moment du système par rapport à cet axe.

Ces notions rappelées, revenons au problème qui nous occupe.

Je considère le système de segments dont les coordonnées seraient A, B, C, L, M, N [formules (2) et (2')], système qui est, en quelque sorte, attaché au contour donné $\mathfrak{C}$, et que je représenterai par la notation $S\mathfrak{C}$.

La résultante de translation de ce système n'est autre que l'*axe aréolaire* du contour. Quant à L, M, N, leur signification est des plus simples.

Supposons que le mouvement hélicoïdal se réduise à une rotation autour de l'axe Ox, la formule (5) nous donne pour expression du volume

$$Lp\,dt$$

ou encore, $\varepsilon = p\,dt$ représentant l'angle de rotation,

$$L\varepsilon.$$

Or les volumes, engendrés par révolution autour d'un même axe, étant proportionnels aux angles de rotation, on voit que L *est le volume que le contour engendrerait par une rotation d'amplitude-unité autour de* Ox. Les quantités M, N ont des significations analogues. Les formules (2′) convenablement interprétées conduisent d'ailleurs au même résultat.

VII. — Interprétation de la formule fondamentale (5).

Il nous est maintenant possible d'interpréter la formule (5). En effet, le déplacement hélicoïdal s'effectue suivant la vis dont les coordonnées α, β, γ, λ, μ, ν sont égales à

$$\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \qquad \beta = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \qquad \gamma = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

$$\lambda = \frac{a}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \qquad \mu = \frac{b}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \qquad \nu = \frac{c}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

et l'amplitude ε de la rotation a pour valeur

$$\varepsilon = \sqrt{p^2+q^2+r^2}\,dt.$$

La formule (5) peut donc s'écrire

$$(12) \qquad (A\lambda + B\mu + C\nu + L\alpha + M\beta + N\gamma)\varepsilon.$$

Si l'on utilise alors la remarque que, dans un mouvement hélicoïdal (cas qui comprend le mouvement de révolution), les volumes engendrés sont proportionnels aux amplitudes, on reconnaîtra qu'il est permis de supposer dans la formule (12) que ε est fini.

La quantité entre parenthèses n'est autre, du reste, que le moment du système $S\Sigma$ par rapport à la vis V qui dirige le mouvement hélicoïdal. De là ce théorème :

Si un contour fermé Σ *est animé d'un mouvement hélicoïdal d'amplitude* ε *sur une vis* V, *le volume engendré est égal au pro-*

duit de l'amplitude ε *par le moment du système* $S\varpi$ *pris par rapport à la vis* V.

Supposons, en particulier, que la vis se réduise à un axe Ξ; on a ce théorème :

Le volume engendré par un contour fermé ϖ *tournant d'un angle* ε *autour d'un axe* Ξ *est égal au produit de l'amplitude* ε *par le moment du système* $S\varpi$ *pris par rapport à l'axe* Ξ.

Ce dernier théorème montre que la théorie des moments de Poinsot et de Mobius s'applique en tous ses points à l'étude des volumes de révolution engendrés par un contour fermé donné. La distribution des volumes est la même que celle des moments d'un certain système de segments. Il est aisé d'en conclure une série de théorèmes calqués sur ceux de la théorie des moments. Par exemple, le lieu des axes de volume nul est un complexe linéaire; le lieu des axes d'égal volume (pour une même amplitude de rotation, bien entendu) est un complexe quadratique, etc.

Dans mes Communications aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, après avoir démontré le théorème relatif aux corps de révolution, j'étais passé au cas des volumes hélicoïdaux par l'application d'une proposition que j'avais démontrée directement et qui me paraît avoir en elle-même quelque intérêt.

Tout déplacement hélicoïdal est la résultante d'une rotation autour de l'axe hélicoïdal et d'une translation le long de ce même axe; si ε est l'amplitude de la rotation, l'amplitude de la translation est égale à $h\varepsilon$, où

$$h = \frac{\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu$$

représente le pas de la vis.

Les coordonnées de l'axe de rotation sont alors

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \lambda - \alpha h, \quad \mu - \beta h, \quad \nu - \gamma h,$$

et les composantes de la translation ont pour valeur

$$\alpha h\varepsilon, \quad \beta h\varepsilon, \quad \gamma h\varepsilon.$$

Le volume engendré dans la rotation est donc égal à

$$|L\alpha + M\beta + N\gamma + A(\lambda - \alpha h) + B(\mu - \beta h) + C(\nu - \gamma h)|\varepsilon,$$

et le volume de translation est, au contraire, égal à

$$(A\alpha + B\beta + C\gamma)h\varepsilon.$$

La somme de ces deux volumes est

$$(L\alpha + M\beta + N\gamma + A\lambda + B\mu + C\nu)\varepsilon,$$

c'est-à-dire le volume hélicoïdal lui-même.

Ainsi, *le volume hélicoïdal est la résultante du volume de révolution et du volume de translation, de même que le mouvement hélicoïdal lui-même est la résultante du mouvement de rotation et du mouvement de glissement.*

VIII. — Cas d'un mouvement quelconque.

J'ai hâte d'arriver au cas d'un déplacement fini *quelconque* du contour. Je suppose que la position du contour dépende d'un paramètre t, que nous pouvons imaginer être le temps. Le mouvement correspondra à une variation de t entre deux limites t_0 et t_1, et ce mouvement pourra être considéré comme une succession de torsions infiniment petites sur des vis successives.

Soient, à l'époque t, α, β, γ, λ, μ, ν les coordonnées de la vis instantanée, prises par rapport à des axes entraînés avec le contour, et ω la vitesse angulaire. Les quantités α, β, γ, λ, μ, ν, ω seront des fonctions connues de la variable t, et le volume engendré dans la torsion élémentaire sera, d'après la formule (12),

$$(A\lambda + B\mu + C\nu + L\alpha + M\beta + N\gamma)\omega\, dt,$$

et, par suite, le volume fini engendré dans le mouvement intégral sera

représenté par l'intégrale définie

$$\int_{t_0}^{t_1} (A\lambda + B\mu + C\nu + L\alpha + M\beta + N\gamma)\omega\, dt.$$

J'introduis alors les notations suivantes

$$(13)\quad \begin{cases} a = \int_{t_0}^{t_1} \alpha\omega\, dt, & b = \int_{t_0}^{t_1} \beta\omega\, dt, & c = \int_{t_0}^{t_1} \gamma\omega\, dt, \\ l = \int_{t_0}^{t_1} \lambda\omega\, dt, & m = \int_{t_0}^{t_1} \mu\omega\, dt, & n = \int_{t_0}^{t_1} \nu\omega\, dt, \end{cases}$$

et l'expression du volume devient

$$(F)\qquad Al + Bm + Cn + La + Mb + Nc.$$

Cette formule générale (F) est celle qui résout complètement le problème général que je m'étais proposé. Nous allons chercher à l'interpréter.

IX. — Système de segments lié au mouvement.

Dire que l'on se donne le mouvement dont est animé le contour $\mathfrak{S}$, c'est dire que l'on se donne les quantités α, β, γ, λ, μ, ν, ω en fonction de t, et, par conséquent, les intégrales a, b, c, l, m, n.

Je regarderai ces six intégrales comme les coordonnées d'un système de segments $S\mathfrak{M}$, dont je pourrai dire qu'il est *attaché au mouvement*, de même que le système $S\mathfrak{S}$ est attaché au contour $\mathfrak{S}$.

Si l'on se reporte alors à la formule (9) qui représente le moment de deux systèmes de segments, on voit que la formule (F) exprime le théorème suivant :

Le volume engendré par un contour fermé $\mathfrak{S}$ dans un mouvement quelconque $\mathfrak{M}$ est égal au moment de deux systèmes de segments $S\mathfrak{S}$, $S\mathfrak{M}$ qui dépendent, le premier, du contour seulement, et le second uniquement du mouvement.

Ainsi se trouve résolu le problème que je m'étais proposé ; il ne me reste plus qu'à en développer quelques conséquences et quelques cas particuliers.

Comme exemple des diverses remarques générales auxquelles peut donner lieu la formule (F), j'énoncerai les deux théorèmes suivants :

I. *Si sept contours fermés sont liés invariablement entre eux, il existe une même relation linéaire et homogène entre les sept volumes auxquels ces contours donnent lieu dans un mouvement commun arbitraire.*

Il suffit, pour démontrer ce théorème, de remarquer que les *sept* volumes $v_1, v_2, \ldots, v_7$ sont des fonctions linéaires des *six* paramètres a, b, c, l, m, n par lesquels intervient le mouvement.

II. *Si l'on imprime à un contour $\mathfrak{C}$ sept mouvements $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_6, \mathfrak{M}_7$, il existe entre les sept volumes engendrés par ce contour une relation linéaire homogène, indépendante du contour choisi.*

Ce théorème résulte d'une remarque analogue à la précédente.

L'observation suivante offre encore un certain intérêt.

Considérons le système $S\mathfrak{M}$, de coordonnées

$$a, \quad b, \quad c, \quad l, \quad m, \quad n,$$

porté par la vis $\frac{a}{\theta}, \frac{b}{\theta}, \frac{c}{\theta}, \frac{l}{\theta}, \frac{m}{\theta}, \frac{n}{\theta}$, où

$$\theta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Il est clair, d'après la formule F, que tout contour fermé invariablement lié aux axes mobiles Ox, Oy, Oz engendre, dans le mouvement $\mathfrak{M}$, le même volume que s'il était animé d'une torsion d'amplitude θ sur la vis $\frac{a}{\theta}, \frac{b}{\theta}, \frac{c}{\theta}, \frac{l}{\theta}, \frac{m}{\theta}, \frac{n}{\theta}$. Appelons $\mathfrak{H}$ cette torsion hélicoïdale. La propriété que nous venons de reconnaître à $\mathfrak{H}$ permet de résoudre immédiatement la question suivante :

Trouver sur une surface donnée convexe Σ une courbe fermée $\mathfrak{C}$ qui

engendre dans un mouvement donné $\mathfrak{M}$ le plus grand volume. Il suffira de résoudre le problème pour la torsion $\mathfrak{J}$; dans ce mouvement de torsion la surface Σ touche son enveloppe suivant une courbe $\mathfrak{C}$ qui est précisément la courbe fermée cherchée.

Je laisse au lecteur le soin de reconnaître qu'il existe des contours pour lesquels $S\mathfrak{C}$ est identiquement nul, d'autres pour lesquels $S\mathfrak{C}$ se réduit à un couple ou à un segment unique. Ce dernier cas est particulièrement intéressant, car il se présente chaque fois que le contour est plan.

X. — Cas d'un contour plan.

Considérons en effet un contour plan et adoptons, pour axes liés au contour, deux axes rectangulaires Gx, Gy, situés dans son plan et se coupant au centre de gravité G de son aire (que je suppose non nulle) et un troisième Gz normal au plan de contour.

Les formules (2) et (2') nous donnent, puisque z est toujours nul sur le contour,

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = \tfrac{1}{2}\int(x\,dy - y\,dx),$$
$$L = -\tfrac{1}{2}\int y^2\,dx, \qquad M = -\tfrac{1}{2}\int x^2\,dy, \qquad N = 0.$$

Or les coordonnées ξ, η du centre de gravité de l'aire sont données par

$$C\xi = \int\int x\,dx\,dy, \qquad C\eta = \int\int y\,dx\,dy,$$

ou encore, en ramenant à des intégrales curvilignes,

$$C\xi = -\tfrac{1}{2}\int x^2\,dy, \qquad C\eta = \tfrac{1}{2}\int y^2\,dx.$$

On a donc

$$C\xi = M, \qquad C\eta = -L.$$

Mais, puisque le centre de gravité est à l'origine, on a

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0;$$

d'où

$$L = 0, \qquad M = 0.$$

Donc toutes les coordonnées du système $S\mathfrak{S}$ sont nulles, sauf C. Le système $S\mathfrak{S}$ est ainsi réductible à un seul segment C, égal à l'aire du contour et élevé perpendiculairement à son plan au centre de gravité de son aire. En un mot, le système se réduit à l'axe aréolaire, transporté au centre de gravité.

Le cas d'un contour plan n'est pas le seul où le système $S\mathfrak{S}$ se réduise à un segment unique. Mais chaque fois que $S\mathfrak{S}$ se réduit à un seul segment, il existe une infinité de contours plans qui, *dans tout mouvement*, engendrent chacun un volume équivalent à celui du contour considéré.

On peut même supposer, par exemple, que ce contour est une circonférence. Prenons en effet le cercle de rayon $\sqrt{\frac{C}{\pi}}$, et qui admettrait pour axe la ligne d'action du segment C; attribuons à ce cercle un sens de parcours qui soit *dextrorsum* avec le segment C : nous obtenons ainsi un contour circulaire dont le système $S\mathfrak{S}$ sera représenté par le segment C, et, par suite, dans tous les mouvements possibles, ce cercle engendrera des volumes équivalents à ceux qu'engendrent tous les contours dont le système se réduit au segment C.

Par suite, on peut énoncer ce théorème :

Un contour plan étant donné, il existe un cercle dans son plan qui, dans tout mouvement, *engendre un volume équivalent à celui engendré par le contour.*

§ XI. — Le théorème de Guldin.

On donne le nom de Guldin à une proposition concernant le volume engendré par un contour plan tournant autour d'une droite de son plan. Guldin a en effet énoncé cette proposition en 1635, dans son Traité *De centro gravitatis;* mais c'est dans les *Exercitationes geometricæ* de Cavalieri qu'on en trouve la première démonstration satisfaisante. Ajoutons qu'un passage obscur des *Collections mathématiques* de Pappus paraît avoir trait aux propositions attribuées à Guldin.

Celle de ces propositions qui concerne les volumes (la seule dont il soit ici question) se déduit aisément de la proposition relative aux corps de révolution du § VII.

En effet, soit un contour plan tournant autour d'un axe Δ situé dans son plan; soit θ l'angle de rotation; le volume sera égal au produit de θ par le moment pris par rapport à Δ du segment unique $\overline{C}$ auquel se réduit ici le système $S\varsigma$. Or, le segment $\overline{C}$ est normal au plan du contour au centre de gravité G de son aire; appelons r la distance de G à l'axe Δ, le moment aura pour valeur

$$r.C$$

et le volume sera, par conséquent,

$$r\theta.C.$$

Comme C est l'aire du contour plan, et $r\theta$ l'arc de cercle décrit par le centre de gravité, on a bien la proposition de Guldin.

Mais on peut généraliser encore cette proposition en l'étendant, sous sa forme légèrement modifiée, au cas d'un contour plan tournant autour d'un axe Δ quelconque.

Le volume sera encore égal au produit de θ par le moment du segment $\overline{C}$, pris par rapport à Δ.

Soit r la plus courte distance de Δ et de la droite Δ' qui porte le segment $\overline{C}$; soit $\sin\alpha$ la valeur positive du sinus de l'angle de ces deux droites. Le moment a pour valeur

$$r\,C\sin\alpha,$$

et le volume est, par conséquent,

$$\theta r.C\sin\alpha.$$

Or, soit P le pied, sur Δ', de la perpendiculaire commune à Δ' et à Δ. Dans θr on aperçoit le chemin décrit par le point P dans la rotation.

Dans $C \sin\alpha$ on reconnaît l'aire de la projection du contour sur le plan mené par le point P et par l'axe Δ.

De là l'énoncé suivant :

Le volume engendré par un contour plan tournant d'un angle quelconque autour d'un axe quelconque Δ est égal au chemin parcouru par le point P, *pied de la perpendiculaire commune à l'axe de rotation Δ et à la normale au plan du contour, élevée au centre de gravité de son aire, multiplié par l'aire de la projection de ce contour sur le plan mené par l'axe de rotation et le point* P.

Telle est la généralisation du théorème de Guldin pour les contours plans. Le cas d'un contour quelconque ne se prête pas à un énoncé aussi simple, et l'emploi du système de segments nous paraît fournir l'expression la plus simple, et en même temps la plus générale que l'on puisse désirer; surtout si, comme nous l'avons fait ici, au lieu de se borner au cas d'un mouvement de révolution, on veut embrasser le cas d'un mouvement quelconque.

XII. — Un cas particulier de mouvement.

Dans la proposition du § IX intervient un système $S\mathfrak{M}$ de segments lié au mouvement. La définition directe de ce système, son interprétation, ne paraît pas aussi simple que celle du système $S\mathfrak{S}$ lié au contour. Il y a cependant un cas où cette interprétation est facile : c'est celui où le mouvement est dirigé par une courbe.

Je dis que le mouvement d'une figure est dirigé par une courbe quand cette figure est liée invariablement au trièdre trirectangle formé par la tangente, la normale principale et la binormale d'une courbe. Soient s l'arc de la courbe directrice compté à partir de la position initiale du sommet du trièdre; σ et τ les arcs correspondants des indicatrices sphériques des tangentes et des binormales de la courbe directrice.

Prenons naturellement le trièdre de la courbe pour trièdre de référence mobile, et soient A, B, C, L, M, N les coordonnées du sys-

tème $S\mathfrak{z}$ attaché à un contour $\mathfrak{z}$, lié invariablement à ce trièdre. Les coordonnées de la vis suivant laquelle s'effectue la torsion instantanée seront (Darboux, *Cours de Géométrie*, t. I, p. 15)

$$\alpha = -\frac{d\tau}{\sqrt{d\tau^2 + d\sigma^2}}, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = \frac{d\sigma}{\sqrt{d\tau^2 + d\sigma^2}},$$

$$\lambda = \frac{ds}{\sqrt{d\tau^2 + d\sigma^2}}, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 0,$$

et l'amplitude de la rotation sera

$$\sqrt{d\tau^2 + d\sigma^2}.$$

Le volume hélicoïdal élémentaire sera donc, d'après la formule (12),

$$A\,ds - L\,d\tau + N\,d\sigma,$$

et le volume intégral dû à un déplacement fini sera alors, d'après la définition de s, σ, τ,

$$(13) \qquad As - L\tau + N\sigma.$$

Telle est la formule simple à laquelle on parvient dans ce cas, et où les coordonnées du système $S\mathfrak{M}$ ont toutes des significations bien connues.

Qu'il s'agisse, par exemple, du cercle osculateur d'une courbe à courbure constante; nous aurons

$$A = 0, \qquad N = 0, \qquad L = \pi\rho^3,$$

où ρ est le rayon de courbure; on aura donc, pour le volume engendré par ce cercle,

$$\pi\rho^3\tau.$$

La formule (13) conduit à un certain nombre de problèmes où interviennent les courbes découvertes par M. Bertrand dans ses recherches sur les surfaces de normales principales.

Georges Halphen;

PAR M. CAMILLE JORDAN.

Notre collaborateur et ami, M. Georges Halphen, a succombé, le 21 mai dernier, aux atteintes d'une maladie imprévue qui est venue le frapper dans toute la force de son talent.

La franchise et la loyauté de son caractère lui avaient fait des amis sincères de tous ceux qui le connaissaient; mais ils ne sont pas seuls à s'affliger d'une perte à laquelle aucun de ceux qui s'intéressent aux sciences ne saurait rester indifférent.

Les liens d'affection qui nous unissaient et la part importante qu'il a prise à ce Journal nous font un devoir de retracer ici, en quelques lignes, cette carrière si courte et si bien remplie.

Il était né à Rouen, le 30 octobre 1844. Après de brillantes études au lycée Saint-Louis, il entra à l'École Polytechnique en 1862 et en sortit, deux années après, comme officier d'artillerie. Il prit part en cette qualité à la guerre de 1870-1871 et fut décoré pour action d'éclat sur le champ de bataille de Pont-Noyelles.

En 1872, il épousa Mlle Aron. Six enfants sont nés de cette heureuse union, qu'aucun nuage ne vint jamais assombrir. A défaut d'une longue existence, Halphen aura eu du moins le bonheur inestimable de trouver dans la douce intimité de son foyer une consolation dans les peines de la vie et un encouragement pour ses travaux.

En 1873, il entra à l'École Polytechnique comme répétiteur, fonction qu'il exerça pendant quatorze ans. Chargé en outre des examens d'ad-

mission pendant les trois dernières années, il laissa dans ce trop court passage le souvenir d'un examinateur incomparable.

En 1886, il fut élu membre de l'Académie des Sciences, à la presque unanimité des suffrages.

L'année suivante, il se décida à quitter l'École Polytechnique pour prendre un service plus actif dans l'armée. Cette détermination inspira un peu d'inquiétude à quelques-uns de ses amis. Ils se demandaient si ces nouvelles fonctions ne l'obligeraient pas à ralentir son activité mathématique et si l'acquisition faite par l'armée d'un excellent officier serait une compensation suffisante au dommage à craindre pour la Science. Qu'auraient-ils dit, s'ils avaient pu prévoir que, consacrant les jours à ses devoirs professionnels et les nuits à ses travaux scientifiques, leur pauvre ami, accablé sous cette tâche écrasante, serait si promptement ravi à leur affection!

Mais il ne mourra pas tout entier; les Œuvres qu'il a laissées feront vivre son nom tant qu'il y aura des Mathématiques.

Son premier travail, *Sur l'intégration des équations linéaires*, date de 1864; mais c'est seulement en 1869 qu'il commença à donner sa mesure par ses recherches sur la *Géométrie énumérative*. Cette branche de la Science, alors toute nouvelle, a pour but de dénombrer les figures d'une espèce déterminée qui satisfont à un système de conditions donné.

La première question traitée par Halphen dans cet ordre d'idées est la suivante : « Trouver le nombre des droites communes à deux congruences données. » Il la résolut par une formule aussi simple qu'élégante.

Enhardi par ce premier succès, il aborda l'étude des systèmes de coniques, qui formait alors le principal objet de cette géométrie nouvelle. On s'occupait surtout de rechercher combien, dans un système de coniques défini par quatre conditions, il y en a qui satisfassent à une nouvelle condition donnée.

M. de Jonquières avait montré le premier que, dans un grand nombre de cas, le nombre cherché est égal à $\alpha\mu$, μ désignant l'ordre du système de coniques, et α un autre entier, ne dépendant que de la nouvelle condition. Chasles, qui s'était jeté avec une véritable passion dans cette recherche, à laquelle il a consacré toute la fin de sa vie, avait obtenu

par induction la formule plus générale $\alpha\mu + \beta\nu$, μ et ν désignant l'ordre et la classe du système, α et β deux entiers ne dépendant que de la condition. Les exemples fournis à l'appui de cette formule étaient si nombreux et si variés, que personne ne doutait plus qu'elle fût générale, bien qu'aucune démonstration tout à fait concluante n'en eût encore été apportée.

Halphen entreprit de donner cette démonstration; en 1873, il crut même y être parvenu. C'est ainsi qu'Abel préludait à ses immortels travaux sur les équations algébriques en essayant de résoudre l'équation du cinquième degré. La question était d'ailleurs si délicate que plusieurs géomètres éminents cédaient à la même époque à une illusion toute semblable. Il nous suffira de nommer Clebsch et M. Lindemann, qui s'est illustré depuis par sa découverte de la transcendance du nombre π.

Halphen ne tarda pas à s'assurer que certains cas singuliers échappaient à sa démonstration. Il n'était pas homme à reconnaître une erreur sans s'occuper aussitôt de la réparer. Il découvrit bientôt que ces exceptions étaient dues à la présence dans le système d'une variété de coniques dégénérées dont l'existence n'avait pas été soupçonnée avant lui, ce qui lui permit de fixer avec précision dans quels cas les formules de de Jonquières et de Chasles sont applicables. Il parvint enfin à la détermination complète du nombre des coniques satisfaisant à cinq conditions quelconques. Ce nombre s'exprime symboliquement par un produit de cinq facteurs, dont chacun ne dépend que d'une seule des conditions données.

Ce beau théorème, si différent de ce qu'on avait pu prévoir, tranchait définitivement cette question si longtemps controversée. Halphen pouvait désormais aborder de nouveaux champs de recherches.

La théorie des points singuliers fixa la première son attention. Cette étude, si importante à la fois pour la Géométrie et pour l'Analyse, était encore peu avancée. On avait bien analysé l'influence des « singularités ordinaires »; mais il restait beaucoup à dire sur les singularités plus complexes. Parmi les géomètres éminents qui se sont attachés à élucider ces questions, Halphen se mit au premier rang. Fidèle à son habitude constante de creuser tous les sujets qu'il touchait et de ne rien laisser d'inachevé, il n'y consacra pas moins de quinze Mémoires, où

sont traités successivement tous les points principaux de la théorie. Parmi les résultats, aussi nombreux que variés, qu'il a obtenus, nous nous bornerons à citer :

La détermination du nombre des intersections de deux courbes absorbées par un point singulier;

Celle de l'abaissement produit dans la classe et dans le genre d'une courbe par la présence d'un point singulier;

Deux démonstrations nouvelles et directes de la loi de la conservation du genre dans les transformations birationnelles;

Deux méthodes nouvelles pour transformer une courbe quelconque en une autre qui n'ait plus que des singularités ordinaires;

La découverte de la loi régulière suivant laquelle varient les ordres et les classes des développées successives d'une courbe;

Enfin la détermination sur une courbe algébrique du nombre des points qui satisfont à une équation différentielle donnée.

En 1877, Halphen étendit la solution de ce dernier problème aux courbes gauches. Il annonçait en même temps être en mesure de traiter la même question pour les surfaces; mais, entraîné vers d'autres recherches, il se borna à donner un exemple, en assignant le degré de la ligne des points paraboliques.

C'est en effet l'année suivante qu'il présentait à la Faculté des Sciences de Paris sa mémorable Thèse *Sur les invariants différentiels*. Il donne ce nom aux expressions différentielles qui se reproduisent à un facteur près par une transformation homographique. Partant de cette définition, il expose un procédé qui permet de les construire successivement sans en omettre aucun.

Un autre travail, qui suivit de près le premier, contient l'extension de ces principes aux invariants différentiels des courbes gauches. Comme application de cette théorie, il forme les équations différentielles des cubiques planes et gauches, des courbes biquadratiques, des lignes tracées sur les surfaces du second degré, etc. Ces exemples de calcul sont loin de donner une idée suffisante de la portée d'un travail par lequel la notion de l'invariance, déjà si féconde en Algèbre et en Géométrie, se trouvait transportée dans le Calcul infinitésimal; mais un nouveau Mémoire d'Halphen ne tarda pas à la mettre en pleine lumière.

L'Académie des Sciences avait proposé comme sujet du Grand Prix des Sciences mathématiques pour 1880 la question suivante : « Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante. » Ce concours restera célèbre à plus d'un titre; car c'est alors que les fonctions fuchsiennes firent leur première apparition sous la plume de M. Poincaré. Halphen, de son côté, s'était proposé de déterminer les équations linéaires réductibles par un changement de variables aux formes que l'on sait intégrer. Nous ne saurions mieux faire, pour donner l'idée de ce grand travail, que de reproduire ici le texte du Rapport de M. Hermite :

« Dans les travaux dont la théorie des équations différentielles a été récemment l'objet, on a eu principalement en vue d'obtenir l'intégrale dans les cas où elle peut s'exprimer par des fonctions uniformes de la variable. Les belles découvertes de M. Fuchs, qui ont joué le principal rôle dans ces recherches, servent également de base pour l'étude plus profonde et plus difficile entreprise par l'auteur du Mémoire n° 1. Il part de ce fait que la transformée d'une équation différentielle linéaire obtenue en substituant à la variable indépendante une fonction quelconque d'une nouvelle variable est une équation linéaire de même ordre, et qu'il en est de même si l'on multiplie l'inconnue par une seconde fonction arbitraire de cette nouvelle variable. Cela étant, l'auteur se propose de déterminer ces deux fonctions, de manière que l'équation transformée soit à coefficients constants, ou bien soit intégrable au moyen de fonctions uniformes, simplement rationnelles ou doublement périodiques. Ces questions sont, comme l'on voit, aussi importantes que difficiles : la solution complète et générale, qui est exposée dans le Mémoire, montre un talent mathématique de l'ordre le plus élevé. Rien n'est plus intéressant que de voir s'introduire dans cette recherche de Calcul intégral les notions algébriques d'invariants qui ont pris naissance dans la théorie des formes, et ces nouvelles combinaisons faire apparaître les éléments cachés d'où dépend, sous ses diverses formes analytiques, l'intégration d'une équation donnée. C'est à M. Laguerre qu'est due l'idée ingénieuse et profonde des invariants et covariants des équations différentielles linéaires; il en a tiré.

pour les équations du troisième et du quatrième ordre, plusieurs beaux théorèmes, et M. Brioschi s'est aussi occupé avec succès du même sujet; mais l'auteur du Mémoire que nous analysons en a encore mieux fait ressortir toute l'importance. Il y joint une considération qui joue également dans ses recherches un rôle essentiel, c'est celle du genre d'une équation algébrique entre deux variables, introduite en Analyse par Riemann et qui est si souvent employée dans les travaux de notre époque. Des applications exposées avec tous les détails nécessaires offrent un grand nombre de résultats entièrement nouveaux et du plus haut intérêt. Nous nous bornerons à citer comme particulièrement remarquables des équations du troisième et du quatrième ordre contenant un paramètre arbitraire, puis d'autres d'ordre impair se rattachant à la division de l'argument dans les fonctions elliptiques, dont la solution, qui n'est pas une fonction uniforme, est obtenue par ces transcendantes. Nous jugeons que ce Mémoire a ajouté à la théorie des équations différentielles linéaires des méthodes générales et des résultats d'une haute importance, et qu'il est digne du Grand Prix des Sciences mathématiques. »

Encouragé par cette haute approbation, Halphen poursuivit ses recherches dans ses Mémoires *Sur les invariants des équations différentielles du quatrième ordre* et *Sur un problème concernant les équations différentielles linéaires*. L'objet de ces travaux est de rechercher le parti que l'on peut tirer, pour l'intégration, du fait que l'on connaîtrait la valeur d'une fonction entière et homogène de ses solutions.

Le jugement de l'Académie, décernant à Halphen le Grand Prix des Sciences mathématiques était à peine rendu, lorsque l'Académie de Berlin proposa comme sujet de Concours pour le prix Steiner : « La solution d'une question importante dans la théorie des courbes gauches algébriques ». Halphen, qui avait déjà publié en 1870 une première Note sur la classification de ces courbes, revint à cette occasion sur cette œuvre de jeunesse et envoya au Concours un Mémoire étendu sur ce sujet aussi difficile qu'important. Cette classification avait été poussée avec peine jusqu'aux courbes du sixième degré; Halphen établit les principes qui manquaient pour aller plus loin et montra

toute l'excellence de sa méthode en donnant à titre d'exemple le tableau complet des courbes des vingt premiers degrés et des courbes de degré 120. L'Académie ne pouvait hésiter à récompenser ce beau travail, qui fut couronné conjointement avec un Mémoire de M. Nöther.

En dehors de ces œuvres maîtresses, Halphen trouvait encore le temps de produire de nombreux Mémoires sur des sujets variés de Géométrie ou d'Arithmétique et surtout sur la théorie des séries. Nous ne nous y arrêterons pas, car nous avons hâte d'arriver à la dernière évolution de ce grand esprit.

Après son élection à l'Académie des Sciences, au commencement de 1886, Halphen porta toute son activité sur les fonctions elliptiques. Leur théorie lui était depuis longtemps familière : il en avait fait d'heureuses applications à l'intégration de certaines classes d'équations linéaires, à des problèmes variés de Géométrie, à l'étude de la courbe élastique; mais il voulut aller plus loin et doter la France d'un Traité complet, au courant des derniers progrès de la Science, et où les applications trouvassent enfin, à côté de la théorie générale, la place qui leur est due à tant de titres. Deux Volumes de ce grand Ouvrage parurent coup sur coup avec une incroyable rapidité et dépassèrent encore l'attente des géomètres. Restait un troisième et dernier Volume, où devaient se trouver exposées les applications à l'Algèbre et à la théorie des nombres. C'était la partie la plus ardue de la tâche, et notre pauvre ami s'y livrait avec un acharnement qui devait lui être fatal. Déjà le travail de préparation approchait de son terme; mais Halphen, croyant pouvoir compter sur l'avenir, avait remis à plus tard le soin de la rédaction. Les deux premiers Chapitres sont seuls achevés; de tout le reste de cet immense labeur il ne subsiste plus qu'un monceau de calculs épars et dépourvus de tout texte explicatif, à l'exception de quelques rares fragments.

Liste des travaux mathématiques de Georges-Henri Halphen.

Les années indiquées sont celles de la publication [1].

I. — Géométrie des complexes et des congruences de droites.

N°		Années
1.	Sur le nombre de droites qui satisfont à des conditions données. [*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXVIII, p. 142 (4 pages).]	1869
2.	Sur les droites qui satisfont à des conditions données. [*Comptes rendus*, t. LXXIII, p. 1441 (4 pages).]	1871
3.	Sur les droites qui satisfont à des conditions données. [*Comptes rendus*, t. LXXIV, p. 41 (4 pages).]	1872
4.	Applications nouvelles d'une proposition sur les congruences de droites. [*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. I, p. 253 (4 pages).]	1873

II. — Théorie des caractéristiques pour les coniques.

5.	Sur les caractéristiques dans la théorie des coniques sur le plan et dans l'espace, et des surfaces du second ordre. [*Comptes rendus*, t. LXXVI, p. 1074 (4 pages).]	1873
6, 7, 8.	Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre, en trois Parties. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. I, p. 130 et 226; t. II, p. 11 (48 pages).]	1873
9.	Sur les caractéristiques des systèmes de coniques. [*Comptes rendus*, t. LXXXIII, p. 537 (4 pages).]	1876
10.	Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre. [*Comptes rendus*, t. LXXXIII, p. 886 (4 pages).]	1876
11, 12.	Sur la théorie des caractéristiques pour les coniques. [*Proceedings of the London Mathematical Society*, t. IX, nos 133 et 134 (23 pages); *Mathematische Annalen*, t. XV, p. 16).]	1877

[1] Nous devons la Communication de cette liste à l'obligeance de M. Guccia.

C. J.

Années.

13. Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre. [*Journal de l'École Polytechnique*, XLVe Cahier, p. 27 (63 pages).] 1878

14. Sur le nombre des coniques qui, dans un plan, satisfont à cinq conditions projectives et indépendantes entre elles. [*Proceedings of the London Mathematical Society*, t. X, n°s 145 et 146 (13 pages).] 1878

15. Observations sur la théorie des caractéristiques. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. VIII, p. 31 (4 pages).] — Réponse de M. Schubert. (*Ibid.*, p. 60.) 1879

III. — Théorie générale des courbes algébriques.

16. Sur les points singuliers des courbes algébriques planes. [*Comptes rendus*, t. LXXVIII, p. 1105 (3 pages).] 1874

17. Sur un point de la théorie des fonctions abéliennes. [*Comptes rendus*, t. LXXVIII, p. 1833 (4 pages).] 1874

18. Sur certaines perspectives gauches des courbes planes algébriques. [*Comptes rendus*, t. LXXX, p. 638 (4 pages).] 1875

19. Sur le genre des courbes algébriques. [*Association française*. Compte rendu de la quatrième session (Nantes), p. 237 (8 pages).]. 1875

20. Sur la conservation du genre des courbes algébriques dans les transformations uniformes. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. IV, p. 29 (13 pages).] 1875

21. Sur les points d'une courbe ou d'une surface qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle ou aux dérivées partielles. [*Comptes rendus*, t. LXXXI, p. 1053 (3 pages).]. 1875

22. Sur une question d'élimination ou sur l'intersection de deux courbes en un point singulier. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. III, p. 76 (17 pages).] 1875

23. Sur le contact des courbes planes avec les coniques et les courbes du troisième degré. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. IV, p. 59 (26 pages).] 1875

24. Sur les correspondances entre les points de deux courbes. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. V, p. 7 (11 pages).] 1876

25. Sur une série de courbes, analogues aux développées [*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. II, p. 87 (58 pages).] 1876

26. Sur la recherche des points d'une courbe algébrique plane, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique et sur les questions analogues dans l'espace [*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. II, p. 257 et 371, 72 pages).] 1876

Nos. Années

27. Sur les points singuliers des courbes algébriques planes. [*Recueil des Savants étrangers*, t. XXVI (112 pages).] 1877
28. Sur les lignes singulières des surfaces algébriques. [*Annali di Matematica pura ed applicata*, 2e série, t. IX, p. 68 (38 pages).] .. 1877
29. Sur les points singuliers des courbes gauches. [*Association française. Compte rendu de la sixième session* (le Havre), p. 132 (10 pages).] 1877
30. Sur les singularités des courbes gauches algébriques. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. VI, p. 10 (17 pages).] 1877
31. Étude sur les points singuliers des courbes algébriques planes [*Appendice au Traité de Géométrie analytique* (*Courbes planes*), par G. Salmon, Ouvrage traduit de l'anglais par O. Chemin; Paris, Gauthier-Villars, 1884 (144 pages).] 1884

IV. — Classification des courbes gauches algébriques.

32. Mémoire sur les courbes gauches algébriques (Extrait). [*Comptes rendus*, t. LXX, p. 380 (4 pages).] 1870
33. Sur les courbes tracées sur les surfaces du second ordre. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. I, p. 19 (2 pages).] 1872
34. Recherches de Géométrie à n dimensions. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. II, p. 34 (19 pages).] 1873
35. Sur quelques propriétés des courbes gauches algébriques (*Bulletin de la Société mathématique*, t. II, p. 69 (4 pages).] 1874
36. Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques (couronné par l'Académie de Berlin). [*Journal de l'École Polytechnique*, LIIe Cahier, p. 1 (200 pages).] 1882

V. — Équations différentielles et invariants.

37. Sur l'intégration des équations linéaires. [*Comptes rendus*, t. LVIII, p. 471 (4 pages).] 1864
38. Sur les invariants différentiels. [*Thèse*. Paris, Gauthier-Villars; 1878 (61 pages).] 1878
39. Sur les invariants différentiels des courbes gauches. [*Journal de l'École Polytechnique*, XLVIIe Cahier, p. 1 (102 pages).] 1880
40. Sur une classe d'équations différentielles linéaires. [*Comptes rendus*, t. XCII, p. 779 (3 pages).] 1881
41. Sur des fonctions qui proviennent de l'équation de Gauss. [*Comptes rendus*, t. XCII, p. 856 (3 pages).] 1881
42. Sur un système d'équations différentielles [*Comptes rendus*, t. XCII, p. 1101 (3 pages).] 1881

N° Années

43. Sur certains systèmes d'équations différentielles. [*Comptes rendus*, t. XCII, p. 1404 (3 pages).] 1881

44. Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables (couronné par l'Académie des Sciences). [*Recueil des Savants étrangers*, t. XXVIII (301 pages).] 1883

45. Sur quelques équations différentielles linéaires du quatrième ordre. [*Comptes rendus*, t. XCVII, p. 247 (3 pages).] 1883

46. Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre. [*Acta mathematica*, t. III, p. 325 (56 pages).] 1883

47. Sur une équation différentielle linéaire du troisième ordre. (Extrait d'une Lettre adressée à M. F. Klein.) [*Mathematische Annalen*, t. XXIV, p. 461 (4 pages).] 1884

48, 49, 50. Sur les multiplicateurs des équations différentielles linéaires (3 Notes). [*Comptes rendus*, t. XCVII, p. 1408 et 1541, et t. XCVIII, p. 134 (9 pages).] ..... 1883 et 1884

51. Sur un problème concernant les équations différentielles linéaires. [*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. I, p. 11 (75 pages).] 1885

52. Sur les formes quadratiques dans la théorie des équations différentielles linéaires. [*Comptes rendus*, t. CI, p. 664 (3 pages).] 1885

53. Sur une nouvelle classe d'équations différentielles linéaires intégrables. [*Comptes rendus*, t. CI, p. 1238 (3 pages).] 1885

VI. — Fonctions elliptiques.

54. Sur la multiplication dans les fonctions elliptiques. [*Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 414 (3 pages).] 1879

55. Sur l'intégration d'une équation différentielle. [*Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 562 (3 pages).] 1879

56. Sur deux équations aux dérivées partielles, relatives à la multiplication de l'argument dans les fonctions elliptiques. [*Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 698 (3 pages).] 1879

57. Sur le développement d'une fonction intermédiaire. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. VII, p. 92 (7 pages).] 1879

58. Sur certaines propriétés métriques, relatives aux polygones de Poncelet. [*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. V, p. 285 (3 pages).] 1879

59. Recherches sur les courbes planes du troisième degré. [*Mathematische Annalen*, t. XV, p. 359 (20 pages).] 1879

60. Problème concernant les courbes planes du troisième degré. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. IX, p. 95 (17 pages).] 1880

61. Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. X, p. 162 (11 pages).]. 1882

Nos. Années.

62. Sur une courbe élastique. [*Comptes rendus*, t. XCVIII, p. 422 (3 pages).] 1884

63. Note sur l'inversion des intégrales elliptiques. [*Journal de l'École Polytechnique*. LIVe Cahier, p. 171 (11 pages).] 1884

64. Sur une courbe élastique. [*Journal de l'École Polytechnique*, LIVe Cahier, p. 183 (67 pages).] 1884

65. Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications. — Première Partie : Théorie des fonctions elliptiques et de leurs développements en séries. Un volume grand in-8° de VIII-492 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1886 1886

66. Sur le problème de Gauss, concernant l'attraction d'un anneau elliptique. [*Comptes rendus*, t. CIII, p. 363 (4 pages).] 1886

67. Sur le mouvement d'un solide dans un liquide. [*Comptes rendus*, t. CIV, p. 807 (4 pages).] 1887

68. Un théorème sur les lignes géodésiques de l'ellipsoïde de révolution allongé. [*Comptes rendus*, t. CV, p. 535 (1 page).] 1887

69. Un théorème sur les arcs des lignes géodésiques des surfaces de révolution du second degré. [*Comptes rendus*, t. CV, p. 583 (2 pages).] 1887

70. Sur le mouvement d'un solide dans un liquide. [*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. IV, p. 5 (77 pages).] 1888

71. Sur l'équation d'Euler (Extrait d'une Lettre adressée à M. G.-B. Guccia). [*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. II, p. 40 (5 pages).] 1888

72. Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications. — Deuxième Partie : Applications à la Mécanique, à la Physique, à la Géodésie, à la Géométrie et au Calcul intégral. Un volume grand in-8° de 659 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1888 1888

73. Sur les intégrales pseudo-elliptiques. [*Comptes rendus*, t. CVI, p. 1263 (8 pages).] 1888

74. Sur la multiplication complexe dans les fonctions elliptiques et, en particulier, sur la multiplication par $\sqrt{-23}$ [*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. V, p. 5 (48 pages).] 1889

75. Sur la résolvante de Galois dans la division des périodes elliptiques par 7. [*Comptes rendus*, t. CVIII, p. 476 (2 pages).] 1889

VII. — Théorie des nombres.

76. Sur le caractère biquadratique du nombre 2. [*Comptes rendus*, t. LXVI, p. 190 (4 pages).] 1868

77. Sur une formule récurrente concernant les sommes des diviseurs des

Années

nombres entiers. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. V, p. 158 (2 pages).] 1877

78. Sur des suites de fractions, analogues à la suite de Farey. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. V, p. 170 (6 pages).] 1877

79. Sur les sommes des diviseurs des nombres entiers, et les décompositions en deux carrés. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. VI, p. 119 (2 pages).] 1878

80. Sur diverses formules récurrentes concernant les diviseurs des nombres entiers. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. VI, p. 173 (16 pages).] 1878

81. Sur l'approximation des sommes de fonctions numériques. [*Comptes rendus*, t. XCVI, p. 634 (3 pages).] 1883

VIII. — Théorie des séries.

82. 83. Sur certaines séries pour le développement des fonctions d'une variable (deux Notes). [*Comptes rendus*, t. XCIII, p. 781 et 833 (6 pages).] 1881

84. Sur quelques séries pour le développement des fonctions à une seule variable. [*Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 2e série, t. V, p. 462 (27 pages).] 1881

85. Sur une série d'Abel. [*Comptes rendus*, t. XCIII, p. 1003 (3 pages).] 1881

86. Sur une série d'Abel. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. V, p. 67 (21 pages).] 1881

87. Sur une série pour développer les fonctions d'une variable. [*Comptes rendus*, t. XCV, p. 609 (3 pages).] 1882

88. 89. Sur la série de Fourier. [*Comptes rendus*, t. XCV, p. 1217, et t. XCVI, p. 188).] ..... 1882 et 1883

IX. — Sujets divers.

90. Sur le mouvement d'une droite. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. I, p. 114 (3 pages).] 1873

91. Sur un problème de probabilités. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. I, p. 221 (3 pages).] 1873

92. Sur le déplacement d'un solide invariable. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. II, p. 56 (7 pages).] 1874

93. Sur un point de la théorie du contact. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. II, p. 94 (3 pages).] 1874

94. Sur le contact des surfaces. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. III, p. 28 (10 pages).] 1874

95. Propriétés relatives à la courbure de la développée d'une surface quelconque. [*Comptes rendus*, t. LXXX, p. 116 (4 pages).] 1875

N°.		Années.
96.	Sur un point de la théorie des surfaces. [*Comptes rendus*, t. LXXX, p. 258 (4 pages).]	1875
97.	Sur les ordres et les classes de certains lieux géométriques. [*Comptes rendus*, t. LXXXIII, p. 705 (4 pages).]	1876
98.	Sur une proposition générale de la théorie des coniques. (Cette proposition est due à Steiner). [*Comptes rendus*, t. LXXXIII, p. 791 (3 pages).]	1876
99.	Théorèmes concernant les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. IV, p. 94 (2 pages).]	1876
100, 101.	Deux théorèmes énoncés sans démonstration dans les procès-verbaux de la Société mathématique. (*Bulletin de la Société mathématique*, t. III, p. 183, et t. VI, p. 79.)	1875 et 1877
102.	Sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches, données de deux directrices rectilignes. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. V, p. 134 (2 pages).]	1877
103.	Sur les lois de Kepler, solution d'un problème proposé par M. J. Bertrand. [*Comptes rendus*, t. LXXXIV, p. 939 (3 pages).]	1877
104.	Sur une proposition d'Algèbre. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. V, p. 160 (3 pages).]	1877
105.	Sur les lois de Kepler. *Bulletin de la Société philomathique*, 7e série, t. I, p. 89 (2 pages).]	1878
106.	Sur la réduction de certaines équations différentielles. [*Comptes rendus*, t. LXXXVII, p. 471 (3 pages).]	1878
107.	Sur certains cas singuliers du déplacement d'un corps solide. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. VIII, p. 18 (2 pages).]	1879
108.	Sur l'équation différentielle des coniques. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. VII, p. 83 (1 page).]	1879
109.	Sur une formule d'Analyse. [*Bulletin de la Société mathématique*, t. VIII, p. 62 (3 pages).]	1880
110, 111, 112.	Sur un critérium relatif à la théorie des coniques. [*Bulletin de la Société philomathique* de 1882; *Nouvelles Annales* de 1882; et *Comptes rendus de l'Association britannique* (York, 1881).]	1881
113.	Sur la théorie du déplacement. [*Nouvelles Annales*, 3e série, t. I (4 pages).]	1883
114.	Formules d'Algèbre, résolution des équations du troisième et du quatrième degré. [*Nouvelles Annales*, 3e série, t. IV (20 pages).]	1885
115.	Notice sur les travaux mathématiques de M. G.-H. Halphen. Paris, Gauthier-Villars, 1885 (52 pages)	1885
116.	Sur le mouvement d'un corps grave de révolution, suspendu par un point de son axe. [*Comptes rendus*, t. C, p. 1065 (3 pages).]	1885

N°		Années.
117.	Sur la convergence d'une fraction continue algébrique. [*Comptes rendus*, t. C, p. 1451 (3 pages).]	1885
118.	Notice sur les Œuvres de M. Bouquet (Jean-Claude), membre de l'Académie des Sciences. [*Comptes rendus*, t. CII, p. 1267 (6 pages).]	1886
119.	Discours prononcé aux obsèques de M. Edmond Laguerre, au nom de l'École Polytechnique. [*Comptes rendus*, t. CIII, p. 425 (1 page).]	1886
120.	Rapport sur les Mémoires présentés pour le Grand Prix des Sciences mathématiques en 1886. [*Comptes rendus*, t. CIII, p. 1302 (3 pages).]	1886
121.	Sur la convergence d'une fraction continue algébrique. [*Comptes rendus*, t. CVI, p. 1326 (4 pages).]	1888
122.	Extrait d'une Lettre adressée à M. Rouché. [*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. VII, p. 204 (1 page).]	1888

Sur les invariants de quelques équations différentielles;

PAR M. P. APPELL.

Il peut arriver qu'une équation différentielle d'une certaine forme conserve la même forme pour des changements de fonction et de variable contenant des fonctions indéterminées. Il est alors de la plus grande importance de former les fonctions des coefficients de l'équation et de leurs dérivées qui restent inaltérées dans ces changements, c'est-à-dire les invariants de l'équation différentielle. La théorie des invariants des équations différentielles linéaires, commencée par MM. Laguerre (1) et Brioschi (2), a reçu son complet développement dans le Chapitre III du Mémoire de M. Halphen : *Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables* (3). M. Roger Liouville (4) a étudié à différents points de vue les invariants de l'équation

$$\frac{dy}{dx} + a_0 y^3 + 3a_1 y^2 + 3a_2 y + a_3 = 0.$$

(1) *Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 116 et 224.

(2) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VII, p. 105.

(3) *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. XXVIII, n° 1.

(4) *Comptes rendus*, 6 septembre 1886, 12 septembre 1887; *American Journal of Mathematics*, t. X, p. 283.

Enfin, dans une Note récente, M. Painlevé [1] annonce un travail sur les invariants d'une certaine classe d'équations différentielles algébriques.

En ce qui concerne l'idée générale d'invariant et le fait de l'existence des invariants, on pourra consulter l'Ouvrage de M. Sophus Lie, *Theorie der Transformations Gruppen*, une Lettre de M. Halphen à M. Sylvester [2] et une Note de M. Goursat [3].

Nous nous proposons, dans le présent travail, l'étude des invariants et des cas d'intégrabilité :

1° Des équations différentielles de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + \ldots + b_p y^p} \qquad (p < n),$$

qui conservent la même forme quand on choisit une nouvelle fonction inconnue η et une nouvelle variable indépendante ξ liées à y et x par les relations

$$y = \eta u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x);$$

2° Des équations différentielles algébriques et homogènes par rapport à la fonction inconnue y et à ses dérivées, équations qui conservent la même forme quand on fait

$$y = \eta u(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x).$$

Parmi les équations de la première catégorie nous étudierons spécialement le cas simple $n = 3$, $p = 0$, déjà considéré par M. Roger Liouville; et, parmi celles de la deuxième, nous traiterons presque exclusivement les équations homogènes du second ordre et du second degré. Quelques-uns des résultats contenus dans ce Mémoire se trouvent indiqués dans deux Notes que nous avons eu l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences dans les séances des 20 juin et 4 juillet 1887.

---

(1) *Comptes rendus*, 5 novembre 1888.

(2) *American Journal of Mathematics*, t. IX, p. 137.

(3) *Comptes rendus*, 3 décembre 1888.

I.

1. Imaginons une équation différentielle du premier ordre algébrique en y et $\frac{dy}{dx}$, et ne contenant $\frac{dy}{dx}$ qu'au premier degré. Cette équation, résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$, sera de la forme

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots + b_p y^p},$$

les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_p$ étant des fonctions de la variable indépendante x.

On peut toujours supposer que le degré du numérateur *surpasse* celui du dénominateur; en effet, si l'on avait

$$n \leq p,$$

on ferait un changement de fonction de la forme

$$y = \frac{1}{z} + \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction de x, telle que le polynôme

$$a_0 + a_1 \varphi + a_2 \varphi^2 + \ldots + a_n \varphi^n$$

ne soit pas identiquement nul; l'équation différentielle prendrait alors la forme

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z^{2+p-n}(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n)}{e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + \ldots + e_p z^p}$$

avec $c_n \gtrless 0$. Cette dernière équation est de nouveau de la forme supposée, mais le degré du numérateur par rapport à la fonction z surpasse d'au moins *deux unités* celui du dénominateur; la différence entre le degré du numérateur et celui du dénominateur pourrait être supérieure à 2, si les coefficients $e_p, e_{p-1}, e_{p-2}, \ldots, e_{p-q}$ $(q < p)$ étaient tous nuls.

En revenant à l'équation

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots + b_p y^p},$$

nous pouvons donc toujours supposer, en vertu de la transformation précédente,

$$p < n - 1.$$

D'après cela, l'équation (1) possède l'importante propriété de conserver la même forme, n et p restant les mêmes, quand on prend une nouvelle variable indépendante ξ, et une nouvelle fonction inconnue η liées à x et y par les relations

$$(2)\qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x), \qquad y = \eta u(x) + v(x),$$

$\mu(x)$, $u(x)$, $v(x)$ étant des fonctions indéterminées de x. Soit

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \eta + \alpha_2 \eta^2 + \ldots + \alpha_n \eta^n}{\beta_0 + \beta_1 \eta + \beta_2 \eta^2 + \ldots + \beta_p \eta^p}$$

la nouvelle équation. En adoptant la définition de M. Halphen [1], on appellera *invariant absolu* de l'équation (1) *une fonction des coefficients a_i, b_k et de leurs dérivées par rapport à x, telle que la même fonction composée avec les coefficients α_i, β_k et leurs dérivées par rapport à ξ lui soit toujours égale quelles que soient les fonctions $\mu(x)$, $u(x)$ et $v(x)$*. Un tel invariant étant désigné par

$$\psi\left(a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots, \frac{da_0}{dx}, \frac{db_0}{dx}, \ldots\right),$$

on aura identiquement

$$\psi\left(a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots, \frac{da_0}{dx}, \frac{db_0}{dx}, \ldots\right)$$
$$= \psi\left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \beta_0, \beta_1, \ldots, \frac{d\alpha_0}{d\xi}, \frac{d\beta_0}{d\xi}, \ldots\right),$$

---

[1] *Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables*, Chap. III.

si l'on remplace $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \beta_0, \beta_1, \ldots$ par leurs expressions en $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots, \mu(x)$, $u(x)$ et $v(x)$.

On appellera *invariant relatif* ou simplement *invariant* une fonction des coefficients a_i, b_k et de leurs dérivées par rapport à x, telle que la même fonction formée avec les coefficients α_i, β_k, et leurs dérivées par rapport à ξ, lui soit égale *à un facteur près*, ce facteur dépendant uniquement des fonctions $\mu(x)$, $u(x)$ et $v(x)$. Pour un tel invariant on aura donc identiquement

$$\begin{aligned}\psi\left(a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots, \frac{da_0}{dx}, \frac{db_0}{dx}, \ldots\right)\\ = \Lambda\psi\left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \beta_0, \beta_1, \ldots, \frac{d\alpha_0}{d\xi}, \frac{d\beta_0}{d\xi}, \ldots\right),\end{aligned}$$

le facteur Λ dépendant uniquement des fonctions $\mu(x)$, $u(x)$ et $v(x)$.

Enfin il existe des fonctions des coefficients a_i, b_k et de leurs dérivées par rapport à x qui ne sont pas des invariants, mais qui ne changent pas ou se reproduisent multipliées par un facteur tel que Λ lorsqu'on fait *seulement un changement de fonction* $[\mu(x) = 1]$, ou *seulement un changement de variable* $[u(x) = 1, v(x) = 0]$; nous les appellerons, comme le fait Laguerre pour les équations linéaires, des *semi-invariants* pour le changement de variable ou le changement de fonction.

Remarque. — Si le degré n du numérateur surpasse de deux unités le degré p du dénominateur

$$p = n - 2,$$

l'équation différentielle est de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + \ldots + b_{n-2} y^{n-2}},$$

a_n et b_{n-2} étant tous deux différents de zéro. Alors l'équation conserve la même forme si l'on prend une nouvelle variable indépendante ξ et une nouvelle fonction η liées à x et y par les relations

$$\frac{dx}{d\xi} = \mu(x), \qquad y = \frac{\eta u(x) + v(x)}{\eta w(x) + 1}.$$

$\mu(x)$, $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ étant des fonctions arbitraires de x, telles que le déterminant $u - vw$ soit différent de zéro. Nous avons donc, pour ces équations particulières, des substitutions contenant *quatre* fonctions arbitraires u, v, w, μ au lieu de trois et ne changeant pas la forme de l'équation : de là résultent, pour ce cas particulier $p = n - 2$, des circonstances spéciales que nous examinerons dans un autre travail.

2. Parmi les équations de la forme précédente

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + \ldots + b_p y^p} \qquad (p < n - 1),$$

les plus simples sont, pour $n = 1$ l'équation linéaire, pour $n = 2$ l'équation de Riccati, et pour $n = 3$ l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3}{b_0 + b_1 y},$$

que l'on peut toujours ramener à une autre de même forme ne contenant pas y au dénominateur; en effet, si b_1 n'est pas nul, il suffit de poser

$$b_0 + b_1 y = \frac{1}{y_1}$$

pour que la nouvelle équation en y_1 prenne la forme

$$\frac{dy_1}{dx} = c_0 + 3c_1 y_1 + 3c_2 y_1^2 + c_3 y_1^3.$$

Donc, si on laisse de côté l'équation linéaire et l'équation de Riccati, l'équation la plus simple de l'espèce considérée peut toujours se ramener à la forme

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = c_0 + 3c_1 y + 3c_2 y^2 + c_3 y^3,$$

déjà étudiée par M. Roger Liouville [1]. Remarquons que, si l'on fait

---

[1] *Comptes rendus*, 6 septembre 1886.

le changement particulier de fonction et de variable

$$y = \lambda\eta, \qquad x = \lambda\xi,$$

où λ est une constante, l'équation deviendra

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \gamma_0 + 3\gamma_1\eta + 3\gamma_2\eta^2 + \gamma_3\eta^3,$$

où

$$\gamma_0 = c_0, \qquad \gamma_1 = \lambda c_1, \qquad \gamma_2 = \lambda^2 c_2, \qquad \gamma_3 = \lambda^3 c_3;$$

c'est ce qui nous conduit à attribuer au coefficient c_i le poids i. On a de plus

$$\frac{d\gamma_i}{d\xi} = \lambda^{i+1}\frac{dc_i}{dx}, \qquad \frac{d^2\gamma_i}{d\xi^2} = \lambda^{i+2}\frac{d^2c_i}{dx^2}, \qquad \ldots,$$

ce qui conduit à attribuer à la dérivée $\frac{d^k c_i}{dx^k}$ le poids $(i+k)$.

Le seul changement de variable

$$x = \mu\xi \qquad (\mu \text{ constant})$$

transforme l'équation différentielle en une autre dont les coefficients sont

$$\gamma_0 = \mu c_0, \qquad \gamma_1 = \mu c_1, \qquad \gamma_2 = \mu c_2, \qquad \gamma_3 = \mu c_3,$$

et l'on a

$$\frac{d\gamma_i}{d\xi} = \mu^2\frac{dc_i}{dx}, \qquad \frac{d^2\gamma_i}{d\xi^2} = \mu^3\frac{d^2c_i}{dx^2}, \qquad \ldots;$$

on est ainsi amené à attribuer le *degré* 1 aux coefficients c_0, c_1, c_2, c et le degré $(1+k)$ à leurs dérivées d'ordre k.

Forme canonique. — Il est possible, par des quadratures, de ramener l'équation (3) à une forme canonique ne contenant plus qu'un invariant absolu. Pour opérer cette réduction, faisons le changement de fonction

$$y = YU(x) + V(x),$$

et déterminons les fonctions U et V de façon que la nouvelle équation différentielle ne contienne ni terme en Y ni terme en Y^2.

Nous aurons

$$V(x) = -\frac{c_2}{c_3}, \qquad U(x) = e^{3\int \frac{c_1 c_3 - c_2^2}{c_3} dx},$$

et l'équation prendra la forme

$$\frac{dY}{dx} = c_3 U^2 Y^3 + \frac{s_3}{U c_3^2},$$

où s_3 désigne la fonction de degré 3 et de poids 6

$$(4) \qquad s_3 = c_0 c_3^2 - 3 c_1 c_2 c_3 + 2 c_2^3 + c_3 \frac{dc_2}{dx} - c_2 \frac{dc_3}{dx}.$$

Enfin faisons un changement de variable indépendante

$$\frac{dX}{dx} = M(x)$$

et déterminons $M(x)$ de façon que le coefficient de Y^3 devienne l'*unité*; nous aurons

$$M(x) = c_3 U^2 = c_3 e^{6\int \frac{c_1 c_3 - c_2^2}{c_3} dx},$$

et l'équation prendra la forme *canonique*

$$(5) \qquad \frac{dY}{dX} = Y^3 + J,$$

où

$$J = \frac{s_3}{c_3^3 U^3} = \frac{c_0 c_3^2 - 3 c_1 c_2 c_3 + 2 c_2^3 + c_3 \frac{dc_2}{dx} - c_2 \frac{dc_3}{dx}}{c_3^3} e^{-9\int \frac{c_1 c_3 - c_2^2}{c_3} dx}.$$

Les fonctions U et s_3 sont des invariants relatifs, J et X des invariants absolus pour toutes les transformations de la forme

$$y = \eta u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x).$$

On peut, *a priori*, se rendre compte de ce fait, en remarquant que la réduction à la forme canonique n'est possible que d'une manière.

Nous allons le vérifier. Pour cela faisons dans l'équation

$$\frac{dy}{dx} = c_0 + 3c_1 y + 3c_2 y^2 + c_3 y^3$$

le changement ci-dessus de fonction et de variable; l'équation prendra la forme

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \gamma_0 + 3\gamma_1\eta + 3\gamma_2\eta^2 + \gamma_3\eta^3,$$

où

$$\gamma_0 = \frac{c_0 + 3c_1 v + 3c_2 v^2 + c_3 v^3 - v'}{\mu u},$$

$$\gamma_1 = \frac{c_1 + 2c_2 v + c_3 v^2}{\mu} - \frac{u'}{3\mu u},$$

$$\gamma_2 = \frac{u(c_2 + c_3 v)}{\mu},$$

$$\gamma_3 = \frac{u^2 c_3}{\mu}.$$

u' et v' désignent les dérivées $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$.

Si nous appelons $(s_3)_0$, U_0, J_0, X_0 les fonctions composées avec les coefficients γ_0, γ_1, γ_2, γ_3 et la variable ξ comme s_3, U, J, X le sont avec c_0, c_1, c_2, c_3 et la variable x, nous aurons

$$(s_3)_0 = \gamma_0\gamma_3^2 - 3\gamma_1\gamma_2\gamma_3 + 2\gamma_2^3 + \gamma_3\frac{d\gamma_2}{d\xi} - \gamma_2\frac{d\gamma_3}{d\xi},$$

$$U_0 = e^{3\int\frac{\gamma_1\gamma_3 - \gamma_2^2}{\gamma_3}d\xi}.$$

En remplaçant γ_0, γ_1, γ_2, γ_3 par les valeurs ci-dessus et $d\xi$ par $\mu\, dx$, on vérifie, toutes réductions faites, que l'on a

$$(s_3)_0 = \frac{u^3}{\mu^3}s_3, \qquad U_0 = \frac{1}{u}U;$$

d'où

$$J_0 = \frac{(s_3)_0}{\gamma_3^3 U_0^3} = \frac{s_3}{c_3^3 U^3} = J,$$

$$X_0 = \int \gamma_3 U_0^2\, d\xi = \int c_3 U^2\, dx = X,$$

équations qui montrent que J et X sont des invariants absolus : il en est de même des dérivées $\frac{dJ}{dX}, \frac{d^2J}{dX^2}, \ldots$ Tout autre invariant absolu est une fonction de J, X et des dérivées $\frac{dJ}{dX}, \frac{d^2J}{dX^2}, \ldots$, comme on le voit immédiatement en formant l'invariant supposé sur la forme canonique.

L'invariant s_3 a été formé par M. Roger Liouville [1].

Remarque. — D'après l'expression de U,

$$U = e^{3\int \frac{c_1 c_3 - c_2^2}{c_1} dx},$$

cette fonction n'est déterminée qu'à un facteur constant près; suivant le choix de la limite inférieure dans l'intégrale, on aura pour U différentes valeurs, et, si l'on appelle U_1 une autre valeur de U, on aura

$$U_1 = \frac{U}{k},$$

k désignant une constante. Appelant J_1 et X_1 les valeurs correspondantes de J et X, on aura

$$J_1 = k^3 J, \qquad \frac{dX_1}{dx} = \frac{1}{k^2}\frac{dX}{dx}, \qquad X_1 = \frac{1}{k^2}(X + h),$$

h désignant une nouvelle constante. La forme canonique correspondante

$$\frac{dY_1}{dX_1} = Y_1^3 + J_1$$

se ramènera à la forme

$$\frac{dY}{dX} = Y^3 + J$$

par la substitution

$$Y_1 = kY, \qquad X_1 = \frac{1}{k^2}(X + h).$$

---

[1] *Comptes rendus*, séances du 6 septembre 1886 et du 12 septembre 1887.

D'après cette remarque, nous ne considérerons pas comme distinctes deux formes canoniques qui se déduisent l'une de l'autre par le changement de J en k^3J et de X en $\frac{1}{k^2}(X+h)$.

5. Les fonctions $\frac{dJ}{dX}, \frac{d^2J}{dX^2}, \cdots$ sont des invariants absolus qui se calculent facilement, par voie récurrente, en fonction des coefficients c_0, c_1, c_2, c_3. En effet, partons des formules précédentes

$$J = \frac{s_3}{c_3^3 U^3}, \qquad \frac{dX}{dx} = c_3 U^2, \qquad U = e^{3\int \frac{c_1 c_3 - c_2^2}{c_3} dx}$$

et posons, avec M. Roger Liouville [1],

$$s_{2n+1} = c_3 \frac{ds_{2n-1}}{dx} - (2n-1) s_{2n-1} \left[\frac{dc_3}{dx} + 3(c_1 c_3 - c_2^2)\right],$$

nous trouverons

$$\frac{dJ}{dX} = \frac{\frac{dJ}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \frac{s_5}{c_3^5 U^5}, \qquad \frac{d^2J}{dX^2} = \frac{s_7}{c_3^7 U^7}, \qquad \cdots, \qquad \frac{d^nJ}{dX^n} = \frac{s_{2n+3}}{c_3^{2n+3} U^{2n+3}}.$$

On en conclut, par exemple, que la condition $s_{2n+3} = 0$ exprime que, dans la forme canonique

$$\frac{dY}{dX} = Y^3 + J,$$

J est un polynôme de degré $(n-1)$ en X.

Dans ce qui suit nous désignerons par J′, J″, ... les invariants absolus $\frac{dJ}{dX}, \frac{d^2J}{dX^2}, \cdots$.

Les invariants absolus J, J′ et X sont des fonctions de x que nous avons calculées : l'élimination de x fournira entre J et X ou entre J et J′ une relation caractéristique de l'équation différentielle considérée.

---

[1] *Comptes rendus*, séance du 12 septembre 1887.

Inversement, étant donnée une relation entre J et X, ou mieux une relation entre J et $J' = \frac{dJ}{dX}$, que l'on peut toujours déduire par différentiation d'une relation entre J et X, on aura, comme il suit, la relation correspondante entre les coefficients c_0, c_1, c_2, c_3 et leurs dérivées par rapport à x. Soit

$$(\alpha) \qquad f(J, J') = 0$$

l'équation donnée : on aura, en différentiant,

$$(\beta) \qquad \frac{\partial f}{\partial J} J' + \frac{\partial f}{\partial J'} J'' = 0.$$

D'autre part, les expressions précédentes de J, J', J'' donnent

$$(\gamma) \qquad \frac{J'^3}{J^5} = \frac{s_5^3}{s_3^5}, \qquad \frac{J'J''}{J^4} = \frac{s_5 s_7}{s_3^4}.$$

L'élimination de J, J', J'' entre ces quatre équations (α), (β), (γ) fournira la condition cherchée sous forme d'une relation entre les deux invariants absolus $\frac{s_5^3}{s_3^5}$ et $\frac{s_5 s_7}{s_3^4}$:

$$(\delta) \qquad F\left(\frac{s_5^3}{s_3^5}, \frac{s_5 s_7}{s_3^4}\right) = 0.$$

Cette condition (δ) est donc *nécessaire* pour que J et J' soient liés par la relation (α); elle est *suffisante*. Pour le démontrer, nous pouvons toujours supposer la relation (α) entre J et J' mise sous la forme

$$(\alpha') \qquad J = \varphi\left(\frac{J'^3}{J^5}\right);$$

d'où, en prenant les dérivées logarithmiques des deux membres par rapport à X,

$$\frac{J'}{J} = \frac{\varphi'\left(\frac{J'^3}{J^5}\right)}{\varphi\left(\frac{J'^3}{J^5}\right)}\left[\frac{3J'^2 J''}{J^5} - \frac{5J'^4}{J^6}\right];$$

en divisant par $\frac{J'}{J}$, nous aurons la relation cherchée entre les invariants $\frac{s_5^3}{s_3^5}$, $\frac{s_5 s_7}{s_3^4}$ sous la forme

$$(\delta') \qquad 1 = \frac{\varphi'\left(\frac{s_5^3}{s_3^5}\right)}{\varphi\left(\frac{s_5^3}{s_3^5}\right)}\left[\frac{3 s_5 s_7}{s_3^4} - \frac{5 s_5^3}{s_3^5}\right],$$

qui remplace la condition (δ). Supposons maintenant que, pour une certaine équation différentielle, les coefficients c_0, c_1, c_2, c_3 vérifient cette condition (δ') : appelons J_1 l'invariant absolu de cette équation différentielle, X_1 la variable canonique et J'_1, J''_1 les dérivées de J_1 par rapport à X_1. On aura

$$\frac{s_5^3}{s_3^5} = \frac{J_1'^3}{J_1^5}, \qquad \frac{s_5 s_7}{s_3^4} = \frac{J'_1 J''_1}{J_1^4},$$

et la condition (δ') pourra s'écrire, après qu'on en aura multiplié les deux membres par $\frac{J'_1}{J_1}$,

$$\frac{J'_1}{J_1} = \frac{\varphi'\left(\frac{J_1'^3}{J_1^5}\right)}{\varphi\left(\frac{J_1'^3}{J_1^5}\right)}\left[\frac{3 J_1'^2 J''_1}{J_1^5} - \frac{5 J_1'^4}{J_1^6}\right];$$

d'où, en intégrant et désignant par k^3 une constante arbitraire,

$$J_1 = k^3 \varphi\left(\frac{J_1'^3}{J_1^5}\right).$$

On pourra toujours amener cette constante k à être l'unité, de façon à amener cette dernière relation à prendre la forme (α'). En effet, en faisant dans la dernière relation

$$J_1 = k^3 J, \qquad X_1 = \frac{1}{k^2}(X + h),$$

on aura

$$J'_1 = \frac{dJ_1}{dX_1} = k^5 \frac{dJ}{dX} = k^5 J',$$

et cette relation se réduira à la relation (α') donnée.

$$J = \varphi\left(\frac{J'^3}{J^5}\right).$$

Or, nous avons vu précédemment (page 370) que l'on ne doit pas considérer comme distinctes deux formes canoniques déduites l'une de l'autre par la substitution

$$J_1 = k^3 J, \qquad X_1 = \frac{1}{k^2}(X + h).$$

La condition formée (δ) ou (δ') est donc nécessaire et suffisante pour que J et J' soient liés par la relation donnée (α) ou (α').

On peut remarquer que si, sans employer l'artifice précédent, on voulait trouver la forme canonique correspondant à une relation donnée

$$F\left(\frac{s_5^3}{s_3^5}, \frac{s_5 s_7}{s_3^4}\right) = 0$$

entre les deux invariants absolus $\frac{s_5^3}{s_3^5}$ et $\frac{s_5 s_7}{s_3^4}$, on aurait à intégrer l'équation

$$F\left(\frac{J'^3}{J^5}, \frac{J' J''}{J^4}\right) = 0.$$

Si, dans cette équation, on remplace J'' par sa valeur

$$J'' = \frac{dV}{dX} = J' \frac{dV}{dJ}$$

et si l'on y fait $J'^3 = z$, $J^5 = t$, elle se transforme en une équation homogène

$$F\left(\frac{z}{t}, \frac{5}{3}\frac{dz}{dt}\right) = 0,$$

intégrable par les méthodes élémentaires.

Exemple. — Cherchons la relation nécessaire et suffisante pour qu'une équation de l'espèce considérée

$$\frac{dy}{dx} = c_0 + 3c_1 y + 3c_2 y^2 + c_3 y^3$$

puisse être ramenée à la forme canonique

$$\frac{dY}{dX} = Y^3 + X^2.$$

On devra avoir $J = X^2$, d'où $J' = 2X$ et

$$4J = J'^2;$$

une nouvelle différentiation donne $J'' = 2$. Alors les équations

$$\frac{s_5^3}{s_3^5} = \frac{J'^3}{J^5}, \qquad \frac{s_5 s_7}{s_3^4} = \frac{J'J''}{J^4}$$

donnent, en remplaçant J et J'' par leurs valeurs $\frac{J'^2}{4}$ et 2,

$$\frac{s_5^3}{s_3^5} = \frac{2^{10}}{J'^7}, \qquad \frac{s_5 s_7}{s_3^4} = \frac{2^9}{J'^7},$$

d'où enfin, en éliminant J', la condition cherchée

$$s_5^2 - 2s_3 s_7 = 0,$$

nécessaire et suffisante. Comme on a

$$\frac{d^3 J}{dX^3} = \frac{s_9}{c_3^9 U^9},$$

la condition $s_9 = 0$ avec $s_7 \gtrless 0$ est aussi une condition *nécessaire* pour que l'équation puisse être réduite à la forme considérée. Mais cette condition n'est pas suffisante; car, si elle est remplie, l'équation pourra se ramener seulement à la forme

$$\frac{dY}{dX} = Y^3 + X^2 + C,$$

C désignant une constante pouvant être différente de 0.

En général, la condition pour que J soit de la forme kX^n est

$$(n-1)s_5^2 - ns_3 s_7 = 0.$$

Cet exemple montre bien la nécessité qu'il y a d'exprimer par une relation entre les deux invariants absolus

$$\frac{s_5^3}{s_3^5}, \quad \frac{s_5 s_7}{s_3^4}$$

la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation de l'espèce étudiée puisse être ramenée à une forme canonique donnée. En introduisant d'autres invariants s_9, s_{11}, ..., on obtiendrait des conditions *nécessaires*, mais non *suffisantes*.

4. *Cas d'intégrabilité.* — 1° Le cas d'intégrabilité le plus simple de l'équation considérée

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = c_0 + 3c_1 y + 3c_2 y^2 + c_3 y^3$$

est le cas où les coefficients c_0, c_1, c_2, c_3 sont constants (indépendants de x) ou peuvent être rendus constants par un changement convenable de fonction et de variable indépendante. Si les coefficients sont constants et si $(c_1 c_3 - c_2^2)$ est différent de zéro, l'invariant absolu J est de la forme

$$J = Ce^{-9\frac{c_1 c_3 - c_2^2}{c_3} x},$$

C désignant une constante, et la variable canonique X est donnée par

$$\frac{dX}{dx} = c_3 e^{6\frac{c_1 c_3 - c_2^2}{c_3} x}, \qquad X = Ge^{6\frac{c_1 c_3 - c_2^2}{c_3} x},$$

G désignant aussi une constante. On a donc

$$J = kX^{-\frac{3}{2}} \qquad (k \text{ constant}).$$

Si, au contraire, la quantité $c_1 c_3 - c_2^2$ est *nulle*, l'invariant absolu J est *constant*. Ainsi, lorsque l'équation est à coefficients constants, l'invariant absolu J est ou bien constant ou bien de la forme $kX^{-\frac{3}{2}}$. Réciproquement, si J est constant, la forme canonique est à coefficients

constants, et si J est de la forme $kX^{-\frac{3}{2}}$, la forme canonique

$$\frac{dY}{dX} = Y^3 + kX^{-\frac{3}{2}}$$

se transforme par la substitution

$$Y = X^{-\frac{1}{2}}Y_1, \qquad X_1 = \log X$$

en l'équation

$$\frac{dY_1}{dX_1} = Y_1^3 + \frac{1}{2}Y_1 + k,$$

dont les coefficients sont constants.

Ce cas d'intégrabilité est identique à celui que M. Roger Liouville a indiqué sous une autre forme dans sa Note du 6 septembre 1886. C'est ainsi que l'équation

$$\frac{dy}{du} + uy^3 \wp' u + 6uy^2 \wp u + (2u+1)y\frac{\wp'' u}{\wp' u} + 2(u+1) = 0,$$

que M. Roger Liouville choisit comme exemple, se ramène à la forme

$$\frac{dY_1}{dX_1} = 4Y_1^3 - g_2 Y_1 - g_3,$$

si l'on y fait

$$2\wp u + y\wp' u = 2Y_1, \qquad u\frac{du}{dX_1} = -\wp' u.$$

2° Nous obtiendrons d'autres cas d'intégrabilité à l'aide de la transformation suivante. Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = A + Bt, \tag{6}$$

où A et B sont des fonctions de x, et remplaçons la variable t par une variable y liée à t par la relation

$$A + Bt = \frac{B}{y}$$

qui donne

$$dt = -\frac{dy}{y^2} - \left(\frac{A}{B}\right)' dx,$$

$\left(\frac{A}{B}\right)'$ désignant la dérivée de $\frac{A}{B}$ par rapport à x.

L'équation (6) prendra la forme

$$(7) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{B}y^3 - \left(\frac{A}{B}\right)' y^2,$$

équation de la forme qui nous occupe

$$\frac{dy}{dx} = c_0 + 3c_1 y + 3c_2 y^2 + c_3 y^3,$$

où

$$c_0 = c_1 = 0, \qquad c_2 = -\frac{1}{3}\left(\frac{A}{B}\right)', \qquad c_3 = -\frac{1}{B}.$$

Si l'équation (6) est intégrable, l'équation (7) l'est aussi et réciproquement.

Par exemple, l'équation (6) est réductible aux quadratures si A et B sont des fonctions *linéaires* de x

$$A = ax + b, \qquad B = \alpha x + \beta,$$

car l'équation (6) est alors *linéaire*. On pourra donc intégrer dans la même hypothèse l'équation (7), qui devient

$$(8) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\alpha x + \beta}y^3 - \frac{3k}{(\alpha x + \beta)^2}y^2,$$

$3k$ désignant la constante $(a\beta - b\alpha)$. Pour simplifier, faisons le changement

$$\alpha x + \beta = \frac{k}{\sqrt{\alpha}}e^{-\xi}, \qquad y = \sqrt{\alpha}\eta,$$

nous aurons l'équation

$$(9) \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = \eta^3 + 3e^{\xi}\eta^2.$$

On pourra donc ramener aux quadratures l'intégration de toute équation de l'espèce considérée

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = c_0 + 3c_1 y + 3c_2 y^2 + c_3 y^3,$$

réductible à la forme (9). Pour trouver la condition qui doit lier les coefficients c_0, c_1, c_2, c_3 de l'équation (3) pour qu'elle soit réductible à la forme (9), calculons les invariants absolus

$$\frac{s_5^3}{s_3^5}, \quad \frac{s_5 s_7}{s_3^4}$$

sur l'équation réduite (9). Nous aurons

$$s_3 = 2e^{3\xi} + e^{\xi}, \qquad s_5 = 18e^{5\xi} + 15e^{3\xi} + e^{\xi},$$
$$s_7 = 270e^{7\xi} + 315e^{5\xi} + 60e^{3\xi} + e^{\xi};$$

d'où

$$\frac{s_5^3}{s_3^5} = \frac{(18e^{4\xi} + 15e^{2\xi} + 1)^3}{e^{2\xi}(2e^{2\xi} + 1)^5},$$

$$\frac{s_5 s_7}{s_3^4} = \frac{(18e^{4\xi} + 15e^{2\xi} + 1)(270e^{6\xi} + 315e^{4\xi} + 60e^{2\xi} + 1)}{e^{2\xi}(2e^{2\xi} + 1)^4}.$$

L'élimination de $e^{2\xi}$ entre ces deux relations fournira la condition cherchée entre les deux invariants absolus $\frac{s_5^3}{s_3^5}$, $\frac{s_5 s_7}{s_3^4}$; en faisant cette élimination, on trouvera en outre l'expression de $e^{2\xi}$ en fonction des deux invariants.

L'équation (6) est encore réductible à des quadratures si elle est *homogène*, c'est-à-dire si A est constant et B proportionnel à $\frac{1}{x}$,

$$A = a, \qquad B = \frac{\alpha}{x}.$$

L'équation (7) prend alors la forme

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\alpha} y^3 - \frac{a}{\alpha} y^2;$$

mais on n'obtient pas ainsi un nouveau cas d'intégrabilité, car la substitution

$$y = \frac{\eta}{x}, \qquad x = e^{\xi}$$

ramène la dernière équation à avoir ses coefficients constants.

3° Si l'on suppose que A et B sont des polynômes du second degré en x,

$$A = ax^2 + bx + c, \qquad B = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

l'équation (6)

$$\frac{dx}{dt} = A + Bt \tag{6}$$

est une équation de Riccati; l'équation (7)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{B}y^3 - \left(\frac{A}{B}\right)' y^2 \tag{7}$$

prend alors la forme

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^3}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} - \left(\frac{ax^2 + bx + c}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}\right)' y^2. \tag{10}$$

On a donc un type d'équations de l'espèce considérée

$$\frac{dy}{dx} = c_3 y^3 + 3c_2 y^2 + 3c_1 y + c_0$$

réductibles à une équation de Riccati. On pourra calculer les invariants absolus $\frac{s_5^3}{s_3^2}$, $\frac{s_5 s_7}{s_3^4}$ de la forme (10) en fonction de x, et, en éliminant x, on aura la condition qui doit lier ces deux invariants pour qu'une équation soit réductible à cette forme (10). Un cas particulier intéressant est celui qu'on obtient en faisant $A = \frac{3}{2}kx^2$, $B = 1$; on voit alors que l'équation

$$\frac{dy}{dx} = -y^3 - 3kxy^2 \tag{11}$$

est réductible à l'équation de Riccati

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}kx^2 + t$$

par le changement de fonction $y = \frac{1}{t + \frac{3}{2}kx^2}$. Ce dernier cas a été traité par M. Roger Liouville (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 12 septembre 1887). Il est bon de remarquer qu'on peut toujours ramener k à être égal à 1, en faisant dans l'équation (11) la substitution

$$y = k^{\frac{1}{3}}\eta, \qquad x = k^{-\frac{2}{3}}\xi.$$

4° L'équation (6)

$$\frac{dx}{dt} = A + Bt,$$

dans laquelle on fait

$$A = -x^3, \qquad B = -3kx^2.$$

prend précisément la forme (11)

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 - 3ktx^2,$$

que nous avons considérée en dernier lieu, et qui a été intégrée par M. Roger Liouville. On saura donc également intégrer l'équation (7)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{B}y^3 - \left(\frac{A}{B}\right)'y^2.$$

c'est-à-dire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{3k}\frac{1}{x^2} - \frac{y^2}{3k},$$

qui, par la substitution

$$y = -3k^{\frac{2}{3}}\eta, \qquad x = -3k^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\xi},$$

devient

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \eta^3 + \frac{3}{\xi^2}\eta^2.$$

En calculant les invariants absolus $\frac{s_3^3}{s_3^2}$, $\frac{s_5 s_7}{s_3^4}$ sur cette forme réduite, on obtiendra, par l'élimination de ξ, la relation entre ces invariants caractérisant les équations réductibles à cette forme.

Parmi les cas d'intégrabilité précédents, les plus simples peuvent se résumer comme il suit : l'équation

$$\frac{dy}{dx} = y^3 + 3y^2 \varphi(x)$$

est intégrable si $\varphi(x)$ a l'une des quatre formes

$$\varphi(x) = \frac{k}{\sqrt{x}}, \qquad \varphi(x) = ke^x, \qquad \varphi(x) = kx, \qquad \varphi(x) = \frac{k}{x^2}.$$

5. Prenons maintenant une équation différentielle de la forme générale

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + \ldots + b_p y^p} = \frac{A(y)}{B(y)},$$

où, comme nous l'avons vu, on peut toujours supposer

$$p < n - 1.$$

Les coefficients a_n et b_p sont essentiellement différents de zéro; le numérateur $A(y)$ et le dénominateur $B(y)$ sont supposés n'avoir pas de diviseur commun.

Nous nous proposons de ramener cette équation à une forme canonique analogue à celle que nous avons trouvée pour l'équation

$$\frac{dy}{dx} = c_0 + 3c_1 y + 3c_2 y^2 + c_3 y^3.$$

Pour cela, faisons d'abord le changement de fonction

$$y = z + V(x),$$

et déterminons V de telle façon que, dans l'expression de $\frac{dz}{dx}$, il ne

figure plus au numérateur de terme en z^{n-1}; nous trouverons

$$V(x) = -\frac{a_{n-1}}{na_n},$$

et l'équation prendra la forme

$$\frac{dz}{dx} = \frac{c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_{n-2} z^{n-2} + c_n z^n}{g_0 + g_1 z + \ldots + g_p z^p},$$

où

$$c_0 = A(V) - g_0 V', \quad c_1 = A'(V) - g_1 V', \quad c_2 = \tfrac{1}{2} A''(V) - g_2 V', \quad \ldots \quad c_n = a_n,$$
$$g_0 = B(V), \quad g_1 = B'(V), \quad g_2 = \tfrac{1}{2} B''(V), \quad \ldots \quad g_p = b_p.$$

Un certain nombre de coefficients $g_0, g_1, g_2, \ldots$ peuvent être nuls, mais $g_p = b_p$ est certainement différent de zéro.

Supposons d'abord $p < n - 2$; nous ferons alors un nouveau changement de fonction

$$z = YU(x),$$

et nous déterminerons $U(x)$ de façon que, dans l'expression de $\frac{dY}{dx}$, il ne figure pas au numérateur de terme en Y^{p+1}.

Nous aurons ainsi

$$g_p U^{p+1}(x) = c_{p+1} U(x), \qquad U = e^{\int \frac{c_{p+1}}{g_p} dx}.$$

et l'équation deviendra

$$\frac{dY}{dx} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} c_0 + (c_1 U - g_0 U')Y + \ldots + U^{p-1}(c_p U - g_{p-1} U')Y^p \\ + c_{p+2} U^{p+2} Y^{p+2} + \ldots + c_{n-2} U^{n-2} Y^{n-2} + c_n U^n Y^n \end{array} \right\}}{g_0 U + g_1 U^2 Y + \ldots + g_p U^{p+1} Y^p}.$$

Enfin un changement de variable indépendante

$$\frac{dX}{dx} = M(x)$$

permettra de rendre égaux les coefficients des termes en Y^n et Y^p des degrés les plus élevés au numérateur et au dénominateur : pour cela,

il est nécessaire et suffisant de prendre

$$M(x) = \frac{c_n}{g_p} U^{n-p-1},$$

ou bien, comme $c_n = a_n$, $g_p = b_p$,

$$M(x) = \frac{a_n}{b_p} U^{n-p-1}, \qquad X = \int \frac{a_n}{b_p} U^{n-p-1}\, dx.$$

En divisant le numérateur et le dénominateur par la valeur commune des coefficients de Y^n et Y^p, on aura la forme canonique

$$(12) \quad \frac{dY}{dX} = \frac{J_0 + J_1 Y + \ldots + J_p Y^p + \star + J_{p+2} Y^{p+2} + \ldots + J_{n-2} Y^{n-2} + \star + Y^n}{I_0 + I_1 Y + I_2 Y^2 + \ldots + I_{p-1} Y^{p-1} + Y^p},$$

le signe ☆ marquant les places des deux termes qui manquent au numérateur. Les $(n + p - 2)$ coefficients restants

$$J_0, \quad J_1, \quad \ldots, \quad J_p, \quad J_{p+2}, \quad \ldots, \quad J_{n-2}; \qquad I_0, \quad I_1, \quad \ldots, \quad I_{p-1}$$

et la variable canonique X sont des *invariants absolus* pour les changements de fonction et de variable de la forme

$$(2) \qquad y = \eta\, u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

$u(x)$, $v(x)$ et $\mu(x)$ étant des fonctions arbitraires de x. Cette propriété résulte de ce que la réduction à la forme canonique n'est possible que d'une seule manière : on peut aussi la vérifier comme nous l'avons fait précédemment (page 369) pour le cas simple de $n = 3$, $p = 0$.

Les dérivées des invariants J_i et I_k par rapport à la variable canonique X sont aussi des invariants absolus. Réciproquement, tout invariant absolu de l'équation différentielle (1) est une fonction des invariants absolus J_i et I_k et de leurs dérivées par rapport à X : c'est ce qu'on voit immédiatement en formant, avec l'équation canonique, l'invariant considéré.

Un cas particulier remarquable auquel s'applique la réduction que

nous venons d'indiquer est le cas où $p = 0$, c'est-à-dire le cas d'une équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots + a_n y^n,$$

que nous avons traité dans une Note présentée à l'Académie des Sciences dans la séance du 4 juillet 1887.

Application. — Cherchons, par exemple, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation de la forme

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + \ldots + b_p y^p} = \frac{A(y)}{B(y)} \qquad (p < n - 2)$$

soit, par la substitution (2), réductible à une équation analogue à *coefficients constants*.

D'abord, si les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_p$ sont constants, on voit, en suivant les transformations effectuées pour arriver à la forme canonique, que les coefficients appelés

$$c_0, \quad c_1, \quad \ldots, \quad c_n, \quad g_0, \quad g_1, \quad \ldots, \quad g_p$$

sont aussi constants. Si c_{p+1} est *nul*, $U(x)$ est une constante, X est proportionnel à x, et les invariants J_i et I_k

$$i = 0, 1, 2, \ldots, p, p+2, \ldots, n-2; \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, p-1$$

sont *constants*. Si c_{p+1} est différent de zéro, on a

$$U = e^{\frac{c_{p+1}}{g_p} x}, \qquad U' = \frac{c_{p+1}}{g_p} U,$$

$$X = \int \frac{a_n}{b_p} U^{n-p-1} dx = \frac{a_n}{b_p} \frac{g_p}{(n-p-1) c_{p+1}} U^{n-p-1}.$$

D'ailleurs les invariants J_i et I_k sont, en désignant par C_i et E_k des constantes, de la forme

$$J_i = C_i U^{i-n} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, p, p+2, \ldots, n-2),$$
$$I_k = E_k U^{k-p} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, p-1).$$

Comme U est égal à une constante multipliée par $X^{\frac{1}{n-p-1}}$, on aura donc, en calculant les invariants en fonction de X,

$$(13) \qquad J_i = K_i X^{\frac{i-p}{n-p-1}}, \qquad I_k = L_k X^{\frac{k-p}{n-p-1}},$$

les lettres K_i et L_k désignant de nouvelles constantes. En résumé, si l'équation différentielle a ses coefficients constants, ou bien les invariants J_i et I_k sont constants, ou bien ils sont de la forme (13).

Réciproquement, si les invariants J_i et I_k d'une équation donnée sont tous constants, la forme canonique est à coefficients constants; si ces invariants sont de la forme (13), on transformera l'équation canonique

$$\frac{dY}{dX} = \frac{J_0 + J_1 Y + \ldots + J_p Y^p + \star + J_{p+2} Y^{p+2} + \ldots + J_{n-2} Y^{n-2} + \star + Y^n}{I_0 + I_1 Y + \ldots + I_{p-1} Y^{p-1} + Y^p}$$

en une équation à coefficients constants par la substitution

$$Y = Y_1 X^{-\frac{1}{n-p-1}}, \qquad \log X = X_1.$$

6. Dans les calculs précédents, nous avons supposé

$$p < n - 2.$$

Le cas

$$p = n - 2$$

mérite une attention spéciale pour deux raisons :

1° La réduction à la forme canonique précédente n'est plus possible, car on a actuellement

$$p + 1 = n - 1,$$

et les termes du numérateur de degrés $(p+1)$ et $(n-1)$ que nous avons fait disparaître successivement, pour arriver à la forme canonique, ne sont plus distincts.

2° Comme nous l'avons déjà remarqué, l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + \ldots + b_p y^p} \qquad (p = n - 2)$$

conserve la même forme si l'on fait le changement de fonction et de variable

$$y = \frac{\eta\, u(x) + v(x)}{\eta\, w(x) + 1}, \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

u, v, w et μ désignant des fonctions indéterminées de x.

En laissant de côté pour le moment ces changements de fonction avec trois fonctions arbitraires u, v, w, nous nous bornerons à réduire l'équation différentielle dans le cas $p = n - 2$ à une forme canonique qui conviendrait aussi aux autres cas, $p < n - 2$, et dont les coefficients seront des invariants absolus pour les substitutions

$$y = \eta\, u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x).$$

Pour arriver à cette forme canonique, nous ferons

$$y = Y\, U(x) + V(x), \qquad \frac{dX}{dx} = M(x),$$

et nous déterminerons U, V et M de façon que, dans l'expression de $\frac{dY}{dX}$, le coefficient de Y^{p-1} au dénominateur et celui de Y^{p+1} au numérateur soient nuls, et que le coefficient de Y^p au dénominateur soit égal à celui de Y^n au numérateur.

L'équation prendra alors la forme canonique

$$\frac{dY}{dX} = \frac{P_0 + P_1 Y + \ldots + P_p Y^p + \star + P_{p+2} Y^{p+2} + \ldots + Y^n}{Q_0 + Q_1 Y + \ldots + Q_{p-2} Y^{p-2} + \star + Y^p},$$

où $P_0, P_1, \ldots, P_p, P_{p+2}, \ldots, P_{n-1}$; $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{p-2}$ sont des invariants absolus.

Il serait aisé de voir, comme nous l'avons fait pour la forme canonique précédemment indiquée, quelles doivent être les expressions de ces invariants en fonction de X pour que l'équation soit réductible à une équation à coefficients constants, par une substitution telle que

$$y = \eta\, u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x).$$

II. — Sur les équations différentielles algébriques et homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées.

7. Les équations différentielles, qui sont algébriques et homogènes par rapport à une fonction y de la variable x et à ses dérivées y', y'', ..., $y^{(n)}$, partagent, avec les équations différentielles linéaires et homogènes, l'importante propriété de conserver la même forme quand on prend une nouvelle variable indépendante ξ et une nouvelle fonction η liées à x et y par les relations

$$\frac{d\xi}{dx} = \mu(x), \qquad y = \eta\, u(x),$$

$\mu(x)$ et $u(x)$ étant des fonctions indéterminées de x. On pourra donc étendre à ces équations la théorie des invariants des équations différentielles linéaires.

Il est utile de remarquer qu'une équation différentielle algébrique, mais *non homogène* par rapport à une fonction z de x et à ses dérivées $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots$, peut être transformée en une équation *homogène* d'un ordre supérieur d'une unité : il suffit, pour cela, de poser

$$z = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx},$$

y étant une nouvelle fonction, ou, plus généralement,

$$z = \psi\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\right),$$

ψ étant une fonction rationnelle. On peut encore poser $z = \lambda y$, λ désignant une constante arbitraire, puis éliminer λ entre l'équation obtenue et sa dérivée.

Enfin une équation différentielle algébrique et homogène entre y, y', y'', ..., $y^{(n)}$ se transforme en une autre équation homogène du même

ordre, mais d'un autre degré en général, si l'on fait

$$y = u^p,$$

p désignant une constante quelconque.

Si l'on a une équation algébrique et homogène

$$\Phi_m(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

de degré m par rapport à la fonction y de x et à ses dérivées, il est évident que tous les invariants de la *forme algébrique* Φ_m sont des invariants de l'équation différentielle; car effectuer un changement de fonction et de variable par les formules

$$\frac{d\xi}{dx} = \mu(x), \qquad y = \eta\, u(x),$$

c'est faire une certaine substitution linéaire sur les quantités y, y', y'', ..., $y^{(n)}$.

Pour simplifier, nous aborderons d'abord l'étude des équations homogènes du *second ordre* et du *second degré*.

8. L'équation générale homogène et du second degré en y, y', y'' est

$$(14) \qquad a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_1 y^2 + 2b_1 y'' y' + 2b_2 y y'' + 2b_3 y' y = 0,$$

les coefficients a_0, a_2, a_1, b_1, b_2, b_3 étant des fonctions de la variable indépendante x. Ces coefficients doivent être envisagés comme étant d'un poids marqué par leurs indices; car, si l'on fait la substitution $y = \lambda^2 \eta$, $x = \lambda \xi$ (λ constant) en appelant η', η'' les dérivées de η par rapport à ξ, l'équation prend la forme

$$\alpha_0 \eta''^2 + \alpha_2 \eta'^2 + \alpha_1 \eta^2 + 2\beta_1 \eta'' \eta' + 2\beta_2 \eta \eta'' + 2\beta_3 \eta' \eta = 0.$$

où

$$\alpha_0 = a_0, \qquad \alpha_2 = \lambda^2 a_2, \qquad \alpha_1 = \lambda^4 a_1,$$
$$\beta_1 = \lambda b_1, \qquad \beta_2 = \lambda^2 b_2, \qquad \beta_3 = \lambda^3 b_3.$$

De plus, les dérivées, telles que $\frac{d^k a_i}{dx^k}$, $\frac{d^k b_i}{dx^k}$, seront de poids $(i+k)$. On a, en effet,

$$\frac{d\alpha_i}{d\xi} = \lambda \frac{d\alpha_i}{dx} = \lambda^{i+1} \frac{da_i}{dx}, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^k \alpha_i}{d\xi^k} = \lambda^{i+k} \frac{d^k a_i}{dx^k}.$$

Ces mêmes coefficients doivent être regardés comme étant tous du degré 1, car le changement de fonction

$$y = \eta \sqrt{k},$$

k désignant une constante, transforme l'équation en une autre dont les coefficients sont

$$ka_0, \quad ka_2, \quad ka_4, \quad kb_1, \quad kb_2, \quad kb_3.$$

Tout invariant de l'équation devra être homogène, quant aux poids et aux degrés de ses différents termes. Par exemple, le discriminant de la forme quadratique

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

est un invariant de poids 6 et de degré 3. Nous supposons ce discriminant différent de zéro; car, s'il était nul, l'équation considérée se décomposerait en deux équations linéaires homogènes. Nous désignerons par A_0, A_2, A_4, B_1, B_2, B_3 les mineurs de D relatifs aux éléments a_0, a_2, a_4, b_1, b_2, b_3, c'est-à-dire les coefficients de la forme adjointe.

Dans l'équation

$$a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2 b_1 y'' y' + 2 b_2 y y'' + 2 b_3 y' y = 0,$$

faisons le changement de fonction et de variable

$$y = \eta\, u(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

$u(x)$ et $\mu(x)$ étant des fonctions indéterminées de x, dont les dérivées

par rapport à x seront désignées par u', u'', μ', μ''. Convenons d'appeler η' et η'' les dérivées de η par rapport à ξ : nous aurons les formules

$$y = \eta u, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{dx} u + \eta u', \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2\eta}{dx^2} u + 2\frac{d\eta}{dx} u' + \eta u''$$

et

$$\frac{d\eta}{dx} = \mu \frac{d\eta}{d\xi}, \qquad \frac{d^2\eta}{dx^2} = \mu^2 \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \mu' \frac{d\eta}{d\xi};$$

d'où les formules de transformation

$$(15) \qquad \begin{cases} y = \eta u, \\ y' = \eta' \mu u + \eta u', \\ y'' = \eta'' \mu^2 u + \eta'(\mu' u + 2\mu u') + \eta u''. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation et ordonnant, on aura une équation

$$(16) \qquad \alpha_0 \eta''^2 + \alpha_2 \eta'^2 + \alpha_1 \eta^2 + 2\beta_1 \eta'' \eta' + 2\beta_2 \eta \eta'' + 2\beta_3 \eta' \eta = 0,$$

où

$$(17) \qquad \begin{cases} \alpha_0 = a_0 \mu^4 u^2, \\ \alpha_2 = a_0(\mu' u + 2\mu u')^2 + a_2 \mu^2 u^2 + 2 b_1 \mu u(\mu' u + 2\mu u'), \\ \alpha_1 = a_0 u''^2 + a_2 u'^2 + a_1 u^2 + 2 b_1 u' u'' + 2 b_2 u'' u + 2 b_3 u u', \\ \beta_1 = a_0 \mu^2 u(\mu' u + 2\mu u') + b_1 \mu^3 u^2, \\ \beta_2 = (a_0 u'' + b_1 u' + b_2 u)\mu^2 u, \\ \beta_3 = (a_0 u'' + b_1 u' + b_2 u)(\mu' u + 2\mu u') \\ \qquad + (b_1 u'' + a_2 u' + b_3 u)\mu u. \end{cases}$$

Si l'on appelle D_1 le nouveau discriminant de la forme quadratique (16), on aura

$$D_1 = \mu^6 u^6 D.$$

D'après les propriétés élémentaires des formes quadratiques, on aper-

çoit immédiatement un second invariant de l'équation différentielle dans le discriminant des termes du second degré en y' et y''

$$A_4 = a_0 a_2 - b_1^2.$$

En effet, en appelant $(A_4)_1$ la fonction analogue formée avec les nouveaux coefficients

$$(A_4)_1 = \alpha_0 \alpha_2 - \beta_1^2,$$

on a

$$(A_4)_1 = \mu^6 u^4 A_4.$$

Les équations différentielles de la forme (14) homogènes et du second degré en y, y', y'' se divisent en trois classes suivant la façon dont la dérivée y'' figure dans l'équation. Dans la première classe se trouvent les équations pour lesquelles les coefficients a_0 et b_1 sont nuls; dans la seconde, celles pour lesquelles a_0 est nul, b_1 étant différent de zéro; dans la troisième se trouvent les équations dans lesquelles a_0 est différent de zéro. Cette classification se trouve justifiée par ce fait que le changement de fonction et de variable que nous venons d'effectuer transforme une équation d'une classe en une autre de la même classe.

Par exemple, si l'on a

$$a_0 = 0, \qquad b_1 = 0,$$

on aura aussi

$$\alpha_0 = 0, \qquad \beta_1 = 0.$$

9. Prenons d'abord la classe la plus simple, celle que l'on obtient en supposant a_0 et b_1 *nuls*. Le coefficient b_2 est nécessairement différent de zéro, car, autrement, l'équation ne serait plus du second ordre et se décomposerait en facteurs linéaires. On a alors une équation de la forme

$$(18) \qquad a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2 b_2 y y'' + 2 b_3 y y' = 0,$$

pour laquelle le discriminant D se réduit à

$$D = - a_2 b_2^2.$$

Si l'on fait le changement

$$y = \eta u(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

l'équation se transforme en une autre de même forme

$$\alpha_2 \eta'^2 + \alpha_4 \eta^2 + 2\beta_2 \eta\eta'' + 2\beta_3 \eta\eta' = 0$$

avec

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= a_2 \mu^2 u^2, \\
\alpha_4 &= a_2 u'^2 + a_4 u^2 + 2b_2 uu'' + 2b_3 uu', \\
\beta_2 &= b_2 \mu^2 u^2, \\
\beta_3 &= a_2 \mu uu' + b_2 u(\mu' u + 2\mu u') + b_3 \mu u^2.
\end{aligned}$$

On en conclut que

$$\frac{a_2}{b_2} = -\frac{D}{b_2^3}$$

est un invariant absolu de l'équation différentielle.

Si l'on fait la substitution

$$y = e^{\int z dx},$$

l'équation différentielle se réduit à l'équation de Riccati

$$(19) \qquad 2b_2 \frac{dz}{dx} + (a_2 + 2b_2) z^2 + 2b_3 z + a_4 = 0.$$

Si $(a_2 + 2b_2) = 0$, c'est-à-dire si l'invariant absolu $\frac{a_2}{b_2}$ est égal à -2, cette dernière équation est *linéaire du premier ordre*. Si $(a_2 + 2b_2)$ n'est pas nul, on peut, comme il est bien connu, ramener l'intégration de l'équation de Riccati (19) à celle d'une équation linéaire du second ordre, par la substitution

$$z = \frac{2b_2}{a_2 + 2b_2} \frac{1}{t} \frac{dt}{dx},$$

t étant la nouvelle fonction inconnue. En particulier, si l'invariant

absolu $\frac{a_2}{b_2}$ a une valeur *constante* k différente de -2, on voit que la substitution

$$y = e^{\int z dx} = t^{\frac{2}{k+2}}$$

transforme l'équation proposée (18) en une équation linéaire homogène du second ordre : cette remarque permettra de trouver sous une forme simple l'intégrale générale de l'équation (18) dans le cas où les coefficients sont constants.

En résumé, les équations de la première classe (18) se ramènent toujours à des équations linéaires du premier ou du second ordre. Il est donc inutile d'insister davantage sur ces équations.

10. Prenons maintenant les équations de la seconde classe, pour lesquelles a_0 est nul, b_1 étant différent de zéro. Ces équations sont de la forme

$$(20) \qquad a_2 y'^2 + a_1 y^2 + 2b_1 y'' y' + 2b_2 y y'' + 2b_3 y' y = 0 \qquad (b_1 \gtrless 0).$$

Si nous faisons le changement de fonction et de variable

$$y = \eta u(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

l'équation devient

$$\alpha_2 \eta'^2 + \alpha_1 \eta^2 + 2\beta_1 \eta'' \eta + 2\beta_2 \eta \eta'' + 2\beta_3 \eta' \eta = 0$$

où, d'après les formules (17),

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_2 &= a_2 \mu^2 u^2 + 2b_1 \mu u(\mu' u + 2\mu u'), \\ \alpha_1 &= a_2 u'^2 + a_1 u^2 + 2b_1 u'' u' + 2b_2 u u'' + 2b_3 u' u, \\ \beta_1 &= b_1 \mu^3 u^2, \\ \beta_2 &= (b_1 u' + b_2 u)\mu^2 u, \\ \beta_3 &= (b_1 u' + b_2 u)(\mu' u + 2\mu u') + (b_1 u'' + a_2 u' + b_3 u)\mu u. \end{aligned} \right.$$

Le discriminant est actuellement

$$D = 2b_1 b_2 b_3 - a_2 b_2^2 - a_1 b_1^2.$$

et le discriminant des termes du second degré en y' et y''

$$A_3 = b_1^2.$$

On obtiendra une forme canonique de l'équation en donnant aux fonctions u et μ des déterminations particulières $U(x)$ et $M(x)$ annulant les coefficients β_2 et α_2. On aura ainsi

$$\frac{U'}{U} = -\frac{b_2}{b_1}, \qquad U = e^{-\int \frac{b_2}{b_1} dx},$$

puis

$$\frac{M'}{M} + \frac{2U'}{U} = -\frac{a_2}{2b_1}, \qquad M = e^{\int \frac{4b_2 - a_2}{2b_1} dx};$$

si l'on divise ensuite tous les termes pour la valeur du coefficient β_1, l'équation prendra la forme canonique

$$(22) \qquad 2Y'Y'' + HY^2 + 2LYY' = 0,$$

où Y désigne la nouvelle fonction inconnue liée à y par la relation

$$y = YU$$

et où Y' et Y'' sont les dérivées de Y par rapport à la variable canonique X liée à x par la relation

$$\frac{dX}{dx} = M(x), \qquad X = \int M(x)\,dx.$$

Les coefficients H et L ont pour valeurs

$$H = \frac{a_2 U'^2 + a_4 U^2 + 2(b_1 U' + b_2 U)U'' + 2b_3 UU'}{b_1 M^3 U^2},$$

$$L = \frac{(b_1 U' + b_2 U)(M'U + 2MU') + (b_1 U'' + a_2 U' + b_3 U)MU}{b_1 M^3 U^2},$$

ou, en remplaçant les rapports $\frac{U'}{U}$ et $\frac{M'}{M}$ par leurs valeurs calculées ci-dessus,

$$H = -\frac{D}{M^3 b_1^3}, \qquad L = \frac{E_4}{M^2 b_1^2},$$

D étant le discriminant de la forme et E_1 l'invariant relatif

$$E_1 = b_2^2 + b_2 b_1' - b_1 b_2' + b_3 b_1 - a_2 b_2$$

de degré 2 et de poids 4.

Comme la réduction à la forme canonique (22) n'est possible que d'une manière, les coefficients H, L et la variable canonique X sont des invariants absolus de l'équation proposée : c'est ce qu'il est aisé de vérifier directement.

Pour qu'une expression soit un invariant absolu de l'équation, il faut et il suffit qu'elle soit fonction de H, L et de leurs dérivées par rapport à X. On aura, par exemple,

$$\frac{d^n L}{dX^n} = \frac{E_{2n+4}}{M^{n+2} b_1^{n+2}},$$

E_{2n+4} étant un invariant relatif de poids $(2n+4)$ qu'on calculera par la formule récurrente

$$E_{2n+4} = b_1 \frac{dE_{2n+2}}{dx} - (n+1) E_{2n+2} \left(\frac{db_1}{dx} + \frac{4b_2 - a_2}{2} \right).$$

Cherchons, par exemple, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation proposée

$$\varphi(y, y', y'') = a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2b_1 y' y'' + 2b_2 y'' y + 2b_3 y y' = 0$$

admette un facteur intégrant, c'est-à-dire pour qu'il existe un facteur λ tel que l'expression

$$\lambda \varphi(y, y', y'')$$

soit la dérivée d'une fonction de y, y', x, qui sera évidemment de la forme

$$g_2 y'^2 + 2g_3 y y' + g_4 y^2.$$

On aura alors identiquement

$$\lambda \varphi(y, y', y'') = \frac{d}{dx}(g_2 y'^2 + 2g_3 y y' + g_4 y^2);$$

faisons le changement de fonction et de variable

$$y = YU, \qquad \frac{dX}{dx} = M$$

qui transforme φ en la forme canonique; l'identité prendra la forme

$$\nu(2Y'Y'' + HY^2 + 2LYY') = \frac{d}{dX}(G_2Y'^2 + 2G_3YY' + G_4Y^2);$$

d'où, en identifiant,

$$G_3 = 0, \qquad \frac{dG_2}{dX} = 0, \qquad G_2 = \nu;$$

G_2 est donc constant ainsi que ν, puis on a

$$\nu H = \frac{dG_4}{dx}, \qquad \nu L = G_4.$$

On obtient enfin, par l'élimination de G_4, la condition cherchée

$$(23) \qquad H - \frac{dL}{dX} = 0.$$

Cette condition nécessaire est évidemment suffisante; car, si elle est remplie, la forme canonique devient

$$2Y'Y'' + Y^2\frac{dL}{dX} + 2LYY' = 0,$$

équation dont le premier membre est la dérivée de

$$Y'^2 + LY^2.$$

D'après les valeurs indiquées plus haut pour H, L, $\frac{dL}{dX}$, la condition (23) s'écrit

$$D + E_6 = 0,$$

relation dont le premier membre est un invariant relatif de poids 6.

On pourrait de même chercher les conditions pour que l'équation considérée

$$(20)\qquad a_2 y'^2 + a_1 y^2 + 2b_1 y' y'' + 2b_2 y'' y + 2b_3 y y' = 0$$

puisse être ramenée à une équation de même forme à coefficients constants par les substitutions

$$y = \eta u(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x);$$

mais nous laisserons cette recherche de côté, en nous bornant à remarquer que l'on peut toujours ramener l'équation différentielle au type

$$(3)\qquad \frac{dy}{dx} = c_0 + 3c_1 y + 3c_2 y^2 + c_3 y^3$$

étudié dans la première Partie. Il suffit, pour cela, de faire, dans la forme canonique

$$2Y'Y'' + HY^2 + 2LYY' = 0,$$

le changement de fonction

$$Y = e^{\int \frac{dX}{Z}},$$

ce qui donne

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{H}{2} Z^3 + LZ^2 + 1,$$

équation du type (3) rappelé à l'instant où

$$c_0 = 1, \qquad c_1 = 0, \qquad c_2 = \frac{L}{3}, \qquad c_3 = \frac{H}{2}.$$

On peut donc réduire l'équation (20) à la forme

$$\frac{dY_1}{dX_1} = Y_1^3 + J,$$

ne contenant qu'un invariant absolu, fonction de H et L.

Chaque cas d'intégrabilité de l'équation (3) en donnera un pour

l'équation homogène du second ordre et du second degré (20) et réciproquement.

11. Un cas particulièrement simple, où l'équation

$$(20)\qquad a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2b_1 y' y'' + 2b_2 y'' y + 2b_3 y y' = 0$$

est intégrable par les méthodes élémentaires, est le cas où les coefficients sont *constants ;* car, en remplaçant y'' par l'expression équivalente $y'\frac{dy'}{dy}$, on a, entre y' et y une équation homogène. Dans ce cas, l'équation admet des solutions de la forme

$$y = ke^{rx},$$

k désignant une constante arbitraire et r une racine de l'équation caractéristique

$$f(r) = 2b_1 r^3 + (a_2 + 2b_2) r^2 + 2b_3 r + a_4 = 0.$$

Ces solutions sont des *intégrales particulières*, comme il résulte de ce que la transformation

$$y = e^{\int u dx}$$

donne l'équation

$$-(2b_1 u + 2b_2)\frac{du}{dx} = 2b_1 u^3 + (a_2 + 2b_2) u^2 + 2b_3 u + a_4,$$

et l'on sait que les valeurs constantes $u = r$ qui annulent le second membre sont des intégrales particulières de l'équation en u : ces valeurs n'annulent pas $2b_1 u + 2b_2$, car autrement le discriminant D serait nul.

On vérifiera sans peine le théorème suivant :

Si les racines de l'équation caractéristique

$$f(r) = 0$$

sont SIMPLES *et* COMMENSURABLES *et si le rapport* $\frac{b_1}{b_2}$ *est* COMMENSURABLE,

l'intégrale générale de l'équation est une RELATION ALGÉBRIQUE *entre* Cy *et* $C'e^x$, C *et* C' *étant des constantes arbitraires.*

Par exemple, si l'on prend l'équation

$$y'y'' - 3yy'' + 2yy' = 0,$$

les racines de l'équation caractéristique sont 0, 1, 2, et les coefficients des termes en y'' ont leur rapport commensurable : l'intégrale générale sera algébrique en y et e^x. On trouve facilement, en exprimant x et y à l'aide de la variable u introduite ci-dessus par la substitution

$$y = e^{\int u\,dx},$$

$$Ce^x = \frac{u^{\frac{3}{2}}(u-2)^{\frac{1}{2}}}{(u-1)^2}, \qquad C'y = \frac{u-2}{(u-1)^2}.$$

L'élimination de u conduira à une relation algébrique entre y et e^x du *genre zéro*. On mettra les expressions de y et e^x sous une forme plus commode en faisant

$$u = \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 - 1};$$

on a alors

$$Ce^x = \frac{4\lambda^3}{(1+\lambda^2)^2}, \qquad C'y = \frac{2(\lambda^2-1)}{(1+\lambda^2)^2},$$

ce qui donne entre e^x et y une équation du quatrième degré. Les solutions *particulières* $y = k$, $y = ke^x$, $y = ke^{2x}$ sont aisées à retrouver sur cette dernière forme. Ainsi faisons, par exemple,

$$\lambda = \frac{t}{C}, \qquad C^2 = 8kC',$$

les expressions de e^x et y deviendront

$$e^x = \frac{4t^3}{(C^2+t^2)^2}, \qquad y = \frac{16k(t^2-C^2)}{(C^2+t^2)^2}$$

et, pour $C = 0$,

$$e^x = \frac{4}{t}, \qquad y = k\frac{16}{t^2};$$

d'où

$$y = ke^{2x}.$$

12. Prenons maintenant l'équation

$$(24)\qquad a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2b_1 y'y'' + 2b_2 y''y + 2b_3 yy' = 0,$$

où le coefficient a_0 est supposé différent de zéro. Si l'on fait le changement de fonction et de variable

$$y = \eta\, u(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

l'équation prend la forme

$$\alpha_0 \eta''^2 + \alpha_2 \eta'^2 + \alpha_4 \eta^2 + 2\beta_1 \eta'\eta'' + 2\beta_2 \eta''\eta + 2\beta_3 \eta\eta' = 0,$$

où les nouveaux coefficients ont les valeurs (17) que nous reproduisons ici :

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
\alpha_0 &= a_0 \mu^4 u^2,\\
\alpha_2 &= a_0(\mu' u + 2\mu u')^2 + a_2 \mu^2 u^2 + 2b_1 \mu u(\mu' u + 2\mu u'),\\
\alpha_4 &= a_0 u''^2 + a_2 u'^2 + a_4 u^2 + 2b_1 u'u'' + 2b_2 u''u + 2b_3 uu';\\
\beta_1 &= a_0 \mu^2 u(\mu' u + 2\mu u') + b_1 \mu^3 u^2,\\
\beta_2 &= (a_0 u'' + b_1 u' + b_2 u)\mu^2 u,\\
\beta_3 &= (a_0 u'' + b_1 u' + b_2 u)(\mu' u + 2\mu u')\\
&\quad + (b_1 u'' + a_2 u' + b_3 u)\mu u.
\end{aligned}\right.$$

Pour trouver, comme précédemment, les invariants absolus les plus simples de l'équation, nous allons la mettre sous une forme réduite dont les coefficients seront des invariants absolus.

Pour cela, nous donnerons d'abord à u et μ des déterminations U et M annulant β_1 ; nous aurons

$$\frac{M'}{M} + 2\frac{U'}{U} = -\frac{b_1}{a_0}, \qquad MU^2 = e^{-\int \frac{b_1}{a_0} dx}.$$

Les coefficients α_2 et β_3 deviennent alors, si l'on y remplace

$$M'U + 2MU'$$

par cette valeur $-\frac{b_1}{a_0}MU$,

$$\alpha_2 = \frac{M^2U^2}{a_0}A_4, \qquad \beta_3 = \frac{MU^2}{a_0}\left(\frac{U'}{U}A_4 - B_3\right),$$

A_4 et B_3 désignant, suivant la convention déjà faite, les mineurs du discriminant D de la forme quadratique (24) relatifs aux éléments a_4 et b_3

$$A_4 = a_0 a_2 - b_1^2, \qquad B_3 = b_1 b_2 - a_0 b_3.$$

Deux cas sont à distinguer suivant que l'invariant A_4 est égal à zéro ou différent de zéro.

15. Supposons d'abord A_4 différent de zéro. On pourra alors déterminer U de façon à annuler β_3, ce qui donne

$$U = e^{\int \frac{B_3}{A_4} dx}$$

et, par suite,

$$M = U^{-2} e^{\int \frac{b_1}{a_0} dx} = e^{-\int \frac{2a_0 B_3 + b_1 A_4}{a_0 A_4} dx};$$

enfin, en appelant X la variable canonique

$$X = \int M\, dx$$

et Y la fonction correspondante liée à y par la relation

$$y = Y\, U(x),$$

on a, après avoir divisé tous les termes par α_0, la forme canonique

$$(25) \qquad Y''^2 + IY'^2 + JY^2 + 2KYY'' = 0$$

avec trois invariants absolus I, J, K. Ces invariants, étant calculés à l'aide des valeurs précédentes de U et M, ont les valeurs

$$I = \frac{A_4}{a_0^2 M^2}, \qquad J = \frac{S_{12}}{a_0 M^4 A_4^2}, \qquad K = \frac{S_6}{M^2 A_4^2},$$

où les numérateurs sont les invariants relatifs

$$A_4 = a_0 a_2 - b_1^2,$$

$$S_6 = \frac{a_0 B_3^2 + b_1 B_3 A_4 + b_2 A_4^2 + a_0\left(A_4 \frac{dB_3}{dx} - B_3 \frac{dA_4}{dx}\right)}{a_0}$$

$$= B_3^2 - A_4 B_2 + A_4 \frac{dB_3}{dx} - B_3 \frac{dA_4}{dx},$$

$$S_{12} = a_0 S_6^2 + A_4^3 D:$$

l'expression de S_{12} résulte immédiatement de cette remarque que le discriminant de la forme canonique est

$$I(J - K^2).$$

L'invariant relatif A_4 est de poids 2, S_6 de poids 6, S_{12} de poids 12.

Si l'on affecte de l'indice 1 les valeurs des quantités précédentes composées avec les coefficients α_0, α_2, α_4, β_1, β_2, β_3 du Tableau (17) et la variable ξ, comme les quantités elles-mêmes sont composées avec a_0, a_2, a_4, b_1, b_2, b_3, et la variable x, on a

$$(a_0)_1 = a_0 \mu^4 u^2, \qquad (A_4)_1 = A_4 \mu^6 u^4, \qquad D_1 = D \mu^6 u^6,$$

$$M_1 = M \frac{1}{\mu}, \qquad (S_6)_1 = S_6 \mu^{10} u^8, \qquad (S_{12})_1 = S_{12} \mu^{24} u^{18}.$$

La variable canonique

$$X = \int M\, dx$$

est aussi un invariant absolu; on a

$$X_1 = \int M_1\, d\xi = \int M\, dx = X.$$

Toute fonction de I, J, K et de leurs dérivées par rapport à X est un invariant absolu de l'équation, et, réciproquement, tout invariant absolu de l'équation est une fonction de I, J, K et de leurs dérivées par rapport à X.

14. Il serait aisé de trouver les conditions nécessaires et suffisantes

pour que l'équation soit réductible à une autre de même forme à coefficients constants, ou pour qu'elle admette un facteur intégrant. Nous chercherons, pour traiter un autre cas d'intégrabilité, quelles relations doivent lier les trois invariants I, J et K pour que l'intégrale générale puisse se mettre sous la forme

$$y = h^2 u_1 + hku_2 + k^2 u_3, \tag{26}$$

h et k désignant deux constantes arbitraires, et u_1, u_2, u_3 des fonctions de x linéairement indépendantes.

On reconnaîtra immédiatement, à l'aide du théorème suivant, si une équation donnée admet une intégrale générale de la forme (26).

Pour qu'une équation différentielle

$$\begin{aligned}\psi(y, y', y''') \\ = a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2b_1 y' y'' + 2b_2 y'' y + 2b_3 y y' = 0\end{aligned}$$

ait pour intégrale générale

$$y = h^2 u_1 + hku_2 + k^2 u_3,$$

u_1, u_2, u_3 désignant des fonctions de x linéairement indépendantes, h et k des constantes arbitraires, il faut et il suffit qu'il existe une fonction λ de x, telle que l'expression

$$\frac{d\psi}{dx} - \lambda\psi$$

soit décomposable en un produit de facteurs linéaires par rapport à y et à ses dérivées.

L'un de ces facteurs sera linéaire et homogène en y, y', y'', y''' : en l'égalant à zéro, on aura une équation linéaire ayant pour intégrales u_1, u_2, u_3; l'autre facteur sera linéaire et homogène en y, y', y''; en l'égalant à zéro, on aura une équation linéaire donnant des intégrales singulières de l'équation donnée $\psi = 0$.

Comme ce théorème est indépendant du choix de la fonction et de

la variable dans l'équation $\psi(y, y', y'') = 0$, on peut changer de fonction et de variable en posant

$$y_1 = \frac{y}{u_3}, \qquad x_1 = \frac{u_2}{u_3},$$

y_1 désignant la nouvelle fonction et x_1 la nouvelle variable; on aura alors, en faisant

$$\frac{u_1}{u_3} = z_1,$$

une équation différentielle ayant pour intégrale générale

$$y_1 = h^2 z_1 + hkx_1 + k^2,$$

z_1 désignant une fonction de x_1. En supprimant l'indice 1, on voit qu'on peut toujours ramener une équation de l'espèce considérée à avoir pour intégrale générale

$$(26') \qquad y = h^2 z + hkx + k^2,$$

z étant une fonction de x dont les dérivées par rapport à x seront appelées z', z'', z'''. En différentiant deux fois l'équation (26'), puis éliminant h et k, on obtient l'équation différentielle

$$\begin{aligned}\psi(y, y', y'') \\ = -(z''y' - z'y'')^2 + y''[z''(y - xy') - y''(z - xz')] = 0.\end{aligned}$$

Dans cette équation, les coefficients de y''^2, y'^2, $y'y''$ sont

$$\begin{aligned} a_0 &= -z'^2 - z + xz', \\ a_2 &= -z''^2, \\ 2b_1 &= \quad 2z'z'' - xz''. \end{aligned}$$

Pour que le coefficient a_0 fût nul, il faudrait

$$-z'^2 - z + xz' = 0.$$

équation de Clairaut qui donne, par la différentiation,

$$-2z'z''+xz''=0$$

ou

$$b_1=0.$$

On a alors, ou bien

$$z''=0, \qquad z'=c \qquad \text{et} \qquad z=cx-c^2,$$

ou bien

$$-2z'+x=0, \qquad z=\frac{x^2}{4}.$$

On ne peut pas avoir $z=cx-c^2$, car les fonctions z, x et 1 qui forment les coefficients de h^2, hk et k^2 dans

$$y=h^2z+hkx+k^2$$

ne seraient plus *linéairement indépendantes;* on ne peut pas avoir $z=\frac{x^2}{4}$, car alors on aurait

$$y=\left(h\frac{x}{2}+k\right)^2,$$

et y serait le carré de l'intégrale générale d'une équation linéaire : l'équation différentielle en y, $\psi(y,y',y'')=0$, serait alors de la première classe, caractérisée par $a_0=b_1=0$, et l'on retomberait dans un cas examiné en détail (p. 393).

Dans notre équation, l'invariant

$$A_1=a_0a_2-b_1^2$$

a pour valeur

$$A_1=z''^2\left(z-\frac{x^2}{4}\right),$$

et, d'après ce que nous venons de voir, cet invariant n'est pas nul.

Cela posé, on vérifie immédiatement l'identité

$$\frac{d\psi}{dx}-2\frac{z'''}{z''}\psi=(z''y'''-y''z''')[2y''(xz'-z-z'^2)+y'z''(2z'-x)+yz''];$$

ce qui montre que, conformément à la première partie du théorème, l'expression

$$\frac{d\psi}{dx} - \lambda\psi$$

se décompose en deux facteurs linéaires en y, y', y'', y''' pour $\lambda = 2\frac{z'''}{z''}$. L'un de ces facteurs égalé à zéro,

$$z''y''' - y''z''' = 0,$$

donne une équation linéaire du troisième ordre admettant pour intégrales linéairement indépendantes

$$z, \quad x, \quad 1;$$

le deuxième facteur, dont la valeur est $\frac{d\psi}{dy''}$, égalé à zéro,

$$(27) \qquad 2y''(xz' - z - z'^2) + y'z''(2z' - x) + yz'' = 0$$

donne une équation linéaire du second ordre admettant comme intégrales particulières des intégrales singulières de l'équation $\psi = 0$.

Nous avons ainsi démontré que, si l'équation différentielle

$$\begin{aligned}\psi(y, y', y'') = a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_1 y^2 \\ + 2b_1 y'y'' + 2b_2 y''y + 2b_3 yy' = 0\end{aligned}$$

a pour intégrale générale

$$(26) \qquad y = h^2 u_1 + hku_2 + k^2 u_3,$$

l'expression

$$\frac{d\psi}{dx} - \lambda\psi$$

est, par une détermination convenable de λ en fonction de x, décomposable en un produit de facteurs linéaires et homogènes en y, y', y'', y'''.

Réciproquement, si l'on peut trouver un facteur λ, tel que

$$(28) \qquad \frac{d\psi}{dx} - \lambda\psi = PQ,$$

P et Q étant linéaires et homogènes en y, y', y'', y''', l'équation $\psi = 0$ aura pour intégrale générale une expression de la forme (26). En effet, l'un des deux facteurs P et Q contiendra seul y''', puisque $\frac{d\psi}{dx}$ contient y''' au premier degré. Supposons que le facteur P contienne seul y''' : alors l'équation

$$P = 0$$

sera une équation différentielle linéaire et homogène du troisième ordre ayant pour intégrale générale

$$y = C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 v_3,$$

C_1, C_2, C_3 désignant des constantes arbitraires.

Si, dans l'identité (28), on remplace y par cette expression, on a, quelles que soient les constantes C_1, C_2, C_3,

$$\frac{d\psi}{dx} - \lambda\psi = 0, \qquad \psi = C e^{\int \lambda dx},$$

C étant une constante, fonction de C_1, C_2, C_3,

$$C = \varphi(C_1, C_2, C_3).$$

Cette fonction $\varphi(C_1, C_2, C_3)$ est une fonction homogène et du second degré de C_1, C_2, C_3; en effet, si, dans la forme quadratique

$$\psi(y, y', y''),$$

on fait la substitution

$$\begin{aligned} y &= C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 v_3, \\ y' &= C_1 v'_1 + C_2 v'_2 + C_3 v'_3, \\ y'' &= C_1 v''_1 + C_2 v''_2 + C_3 v''_3, \end{aligned}$$

on obtient évidemment une forme quadratique de C_1, C_2, C_3; en outre, le discriminant de la forme ψ étant supposé différent de zéro, il en est de même du discriminant de $\varphi(C_1, C_2, C_3)$. On pourra toujours remplacer C_1, C_2, C_3 par trois autres constantes K_1, K_2, K_3, liées à C_1,

C_2, C_3 par des relations de la forme

$$C_1 = \alpha_{11} K_1 + \alpha_{12} K_2 + \alpha_{13} K_3,$$
$$C_2 = \alpha_{21} K_1 + \alpha_{22} K_2 + \alpha_{23} K_3,$$
$$C_3 = \alpha_{31} K_1 + \alpha_{32} K_2 + \alpha_{33} K_3,$$

les α_{ij} étant des constantes dont le déterminant n'est pas nul, de telle façon que la forme quadratique $\varphi(C_1, C_2, C_3)$ prenne la forme réduite

$$K_1 K_3 - K_2^2;$$

l'expression de y,

$$y = C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 v_3$$

deviendra alors

$$y = K_1 u_1 + K_2 u_2 + K_3 u_3,$$

si l'on pose

$$u_i = \alpha_{1i} v_1 + \alpha_{2i} v_2 + \alpha_{3i} v_3, \qquad (i = 1, 2, 3);$$

et l'on aura identiquement, quelles que soient les constantes K_1, K_2, K_3,

$$\psi(y, y', y'') = (K_1 K_3 - K_2^2) e^{\int \lambda dx}.$$

Si l'on fait, en particulier,

$$K_1 = h^2, \qquad K_2 = hk, \qquad K_3 = k^2, \qquad K_1 K_3 - K_2^2 = 0,$$

on voit que l'expression

$$y = h^2 u_1 + hk u_2 + k^2 u_3$$

est une solution de l'équation $\psi(y, y', y'') = 0$ avec deux constantes arbitraires h et k : c'est donc l'intégrale générale.

Si, dans l'identité

$$\frac{d\psi}{dx} - \lambda\psi = PQ,$$

on prend le second facteur Q pour l'égaler à zéro, on a une équation linéaire du second ordre dont l'intégrale générale est

$$y = g_1 y_1 + g_2 y_2.$$

g_1 et g_2 désignant des constantes arbitraires. En remplaçant y par cette valeur dans l'identité

$$\frac{d\psi}{dx} - \lambda\psi = PQ,$$

on a

$$\frac{d\psi}{dx} - \lambda\psi = 0, \qquad \psi = G e^{\int \lambda dx},$$

G étant une fonction homogène et du second degré de g_1 et g_2

$$G = \varpi(g_1, g_2).$$

Si donc on établit entre g_1 et g_2 la relation

$$\varpi(g_1, g_2) = 0,$$

qui fournit en général deux valeurs pour le rapport $\frac{g_1}{g_2}$, la fonction

$$y = g_1 y_1 + g_2 y_2$$

sera une solution de l'équation $\psi(y, y', y'') = 0$; on obtient ainsi des intégrales singulières, comme il est aisé de le vérifier sur l'équation réduite de la page 405, admettant pour intégrale générale

$$y = h^2 z + hkx + k^2.$$

Ces intégrales singulières se déduisent de l'intégrale générale par les méthodes connues; nous les indiquons plus loin (p. 414).

Le théorème précédent peut être étendu à des équations de tous les ordres et de tous les degrés, comme nous l'avons montré dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 12 novembre 1888.

Exemples. — L'équation

$$(29) \qquad 3x^2 y''^2 - 2y''(3xy' + y) + 4y'^2 = 0$$

a pour intégrale générale l'expression

$$y = h^2 x^2 + hkx + k^2,$$

vérifiant l'équation $y''' = 0$, et pour intégrales singulières les expressions

$$y = g_1 x^{\frac{3+2\sqrt{3}}{3}}, \qquad y = g_2 x^{\frac{3-2\sqrt{3}}{3}},$$

vérifiant l'équation du second ordre

$$3x^2 y'' - 3xy' - y = 0.$$

L'équation

$$y''^2(2x^2 - 9x^3) + 6x(6x - 1)y'y'' + 6yy'' - 36xy'^2 = 0$$

admet l'intégrale générale

$$y = h^2 x^3 + hkx + k^2$$

vérifiant l'équation du troisième ordre

$$xy''' - y'' = 0$$

et les deux intégrales singulières

$$y = gx\sqrt{4x - 1}\, e^{\pm\int \frac{2\sqrt{9x^2 - 2x}}{4x^2 - x}\, dx},$$

vérifiant l'équation du second ordre

$$y''(2x^2 - 9x^3) + 3x(6x - 1)y' + 3y = 0.$$

15. Indiquons, pour terminer, quelles conditions doivent remplir les invariants I, J, K pour qu'une équation

$$a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_3 y^2 + 2b_1 y'y'' + 2b_2 y''y + 2b_3 yy' = 0.$$

où

$$a_0 \gtrless 0, \qquad A_1 \gtrless 0,$$

admette une intégrale de la forme précédente

$$y = h^2 u_1 + hku_2 + k^2 u_3.$$

Cette équation étant ramenée à la forme canonique

$$\Phi = Y''^2 + I Y'^2 + J Y^2 + 2 K Y Y'' = 0,$$

où la variable indépendante est X, nous désignerons par I′, J′ et K′ les dérivées de I, J, K par rapport à X.

En désignant par λ une fonction de X, on a identiquement

$$\frac{d\Phi}{dX} - \lambda\Phi = 2 Y'' Y''' + 2 K Y Y''' - \lambda Y''^2 + (I' - \lambda I) Y'^2 + (J' - \lambda J) Y^2$$
$$+ 2(I + K) Y' Y'' + 2(K' - \lambda K) Y Y'' + 2 J Y Y'.$$

Il faut exprimer que, pour une détermination convenable de λ, cette expression se décompose en un produit de facteurs linéaires de la forme

$$2(Y''' + \alpha Y'' + \beta Y' + \gamma Y)(Y'' + \delta Y' + \varepsilon Y).$$

En identifiant les termes en Y''', on trouve immédiatement

$$\delta = 0, \qquad \varepsilon = K,$$

puis, en remplaçant δ et ε par ces valeurs,

$$2\alpha = -\lambda, \qquad I' - \lambda I = 0, \qquad J' - \lambda J = 2\gamma K, \qquad I + K = \beta,$$
$$K' - \lambda K = \gamma + \alpha K, \qquad J = K\beta.$$

L'élimination des indéterminées λ, α, β, γ donne les deux conditions

$$J - K^2 = IK, \qquad I(J' - 2KK') = I'(J - K^2),$$

dont la seconde s'écrit

$$\frac{J' - 2KK'}{J - K^2} = \frac{I'}{I},$$

et, en intégrant,

$$J - K^2 = IC,$$

C désignant une constante. En égalant ces deux valeurs de $J - K^2$, on a la condition

$$(K - C) I = 0,$$

qui donne

$$(30) \qquad I = 0, \qquad J - K^2 = 0,$$

ou bien

$$(31) \qquad K = C, \qquad J = C^2 + CI.$$

Les premières conditions (30) ne peuvent pas être remplies, car elles expriment que le discriminant de la forme canonique est nul. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation ait une intégrale générale de la forme indiquée sont donc les deux conditions (31). Si ces conditions sont remplies, on a

$$\lambda = \frac{I'}{I}, \qquad \alpha = -\frac{I'}{2I}, \qquad \gamma = -\frac{CI'}{2I}, \qquad \beta = I + C.$$

L'équation du troisième ordre qui sert à trouver l'intégrale générale est alors

$$Y''' - \frac{I'}{2I} Y'' + (I + C) Y' - \frac{CI'}{2I} Y = 0,$$

et celle du deuxième ordre qui donne des intégrales singulières

$$Y'' + CY = 0,$$

dont l'intégration est immédiate.

Ainsi, lorsqu'une équation homogène du second degré en y, y', y'' admet pour intégrale générale

$$y = h^2 u_1 + hku_2 + k^2 u_3,$$

h et k étant des constantes arbitraires, la transformation qui ramène cette équation à la forme canonique ramène en même temps l'équation linéaire du second ordre donnant les intégrales *singulières* à la forme immédiatement intégrable

$$Y'' + CY = 0.$$

On vérifiera sans peine que, si l'on substitue l'intégrale générale de cette équation

$$Y = g_1 e^{\lambda\sqrt{-c}} + g_2 e^{-\lambda\sqrt{-c}},$$

dans l'équation canonique, on trouve

$$g_1 g_2 = 0;$$

de sorte que

$$Y = g_1 e^{\lambda\sqrt{-c}}, \qquad Y = g_2 e^{-\lambda\sqrt{-c}}$$

seront les deux intégrales singulières de l'équation canonique.

Appliquons ce résultat à l'équation formée précédemment page 405

$$(32) \quad -y''^2(z'^2 + z - xz') + y''y'z''(2z' - x) + yy''z'' - y'^2 z''^2 = 0,$$

qui a pour intégrale générale

$$y = h^2 z + hkx + k^2$$

et qui admet deux intégrales singulières vérifiant l'équation linéaire du second ordre

$$(33) \qquad -2y''(z'^2 + z - xz') + y'z''(2z' - x) + z''y = 0.$$

Nous verrons qu'en faisant

$$\alpha = z - \frac{x^2}{4}, \qquad \beta = z'^2 + z - xz'$$

on a, pour l'expression des intégrales singulières de l'équation (32),

$$y = g_1\sqrt{\alpha}\, e^{\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}dx}, \qquad y = g_2\sqrt{\alpha}\, e^{-\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}dx},$$

g_1 et g_2 désignant des constantes arbitraires. On obtiendrait immédiatement ces deux intégrales en cherchant les solutions communes aux équations (32) et (33). L'élimination de y'' entre ces deux équations donnera deux valeurs pour $\frac{y'}{y}$: les valeurs correspondantes de y

sont celles que nous venons d'indiquer; on vérifiera qu'elles satisfont bien aux deux équations.

16. La forme canonique précédente trouvée pour l'équation

$$a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2b_1 y' y'' + 2b_2 y'' y + 2b_3 y y' = 0$$

a été établie dans l'hypothèse que a_0 et $A_4 = a_0 a_2 - b_1^2$ sont différents de zéro. Voyons ce qui arrive si $A_4 = 0$. Alors on pourra toujours faire un changement de fonction et de variable

$$y = YU(x), \qquad \frac{dX}{dx} = M(x),$$

de façon à annuler le terme en $Y'Y''$: on trouve ainsi (p. 401)

$$\frac{M'}{M} + 2\frac{U'}{U} = -\frac{b_1}{a_0}, \qquad MU^2 = e^{-\int \frac{b_1}{a_0} dx}.$$

Comme nous l'avons vu à l'endroit cité, le coefficient α_2 de Y'^2 se réduit alors à $\frac{M^2U^2}{a_0} A_4$, c'est-à-dire à *zéro*, et le coefficient β_3 de YY' devient $-\frac{MU^2}{a_0} B_3$.

La quantité B_3 n'est pas nulle : car on a identiquement

$$A_2 A_4 - B_3^2 = a_0 D;$$

comme A_4 est nul, si B_3 l'était aussi, on aurait $D = 0$ et le premier membre de l'équation différentielle se décomposerait en facteurs linéaires. On pourra alors déterminer M de façon à rendre le coefficient α_0 de Y''^2, dans l'équation en Y, égal au coefficient β_3 de $2YY'$: on a ainsi, d'après les expressions (17) de la page 401, où l'on remplace u et μ par U et M,

$$a_0 M^4 U^2 = -\frac{MU^2}{a_0} B_3,$$

$$M^3 = -\frac{B_3}{a_0^2}, \qquad M = -\sqrt[3]{\frac{B_3}{a_0^2}}.$$

Puis on a

$$MU^2 = e^{-\int \frac{b_1}{a_0} dx}, \qquad U = M^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\int \frac{b_1}{a_0} dx}.$$

En divisant tous les termes par $\alpha_0 = a_0 M^4 U^2$, on ramène ainsi l'équation à la forme canonique

$$Y''^2 + PY^2 + 2QYY'' + 2YY' = 0,$$

avec deux invariants absolus P et Q dont l'expression est facile à former. La variable canonique X est aussi un invariant absolu. Tout invariant absolu de l'équation est une fonction de P, Q et de leurs dérivées par rapport à X et réciproquement.

Il serait aisé de trouver quelles conditions nécessaires et suffisantes doivent remplir les invariants P et Q pour que l'équation soit réductible à une autre à coefficients constants ou admette un facteur intégrant. Mais je laisse de côté cette question, qui se traiterait comme les questions analogues précédentes, pour ajouter quelques remarques sur les équations homogènes du second ordre et du second degré à coefficients constants.

17. Lorsque, dans l'équation

$$a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2b_1 y' y'' + 2b_2 y'' y + 2b_3 y y' = 0,$$

$a_0, a_2, a_4, b_1, b_2, b_3$ sont *constants*, $(a_0 \gtrless 0)$, l'intégration de l'équation se fait par les méthodes élémentaires en remplaçant y'' par $y' \frac{dy'}{dy}$, ce qui donne une équation homogène entre y et y'. Il existe alors des solutions de la forme

$$y = ke^{rx},$$

k étant une constante arbitraire et r une racine de l'équation caractéristique

$$f(r) = a_0 r^4 + 2b_1 r^3 + (a_2 + 2b_2) r^2 + 2b_3 r + a_4 = 0.$$

Parmi les solutions ainsi obtenues, les unes sont *particulières*, les autres *singulières*, tandis que, dans le cas de $a_0 = 0$ examiné précédemment, elles sont toutes *particulières*. C'est ce qui résultera d'un exemple que nous allons donner.

Si les coefficients a_0, a_2, a_4, b_1, b_2, b_3 sont de la forme

$$a_0 = (x-a)^4\alpha_0, \qquad a_2 = (x-a)^2\alpha_2, \qquad a_4 = \alpha_4,$$
$$b_1 = (x-a)^3\beta_1, \qquad b_2 = (x-a)^2\beta_2, \qquad b_3 = (x-a)\beta_3,$$

où a, α_0, α_2, α_4, β_1, β_2, β_3 sont des constantes, on ramènera ce cas au précédent par le changement de variable

$$x - a = e^{x'}.$$

L'équation admettra alors des solutions de la forme

$$y = k(x-a)^r,$$

r étant racine de l'équation

$$\varphi(r) = \alpha_0 r^2(r-1)^2 + \alpha_2 r^2 + \alpha_4 + 2\beta_1 r^2(r-1) + 2\beta_2 r\,(r-1) + 2\beta_3 r = 0.$$

Certaines de ces solutions sont *particulières*, d'autres *singulières*. Par exemple, l'équation (29)

$$3x^2y''^2 - 2y''(3xy' + y) + 4y'^2 = 0,$$

déjà examinée à la page 410, rentre dans cette catégorie : elle admet des solutions de la forme

$$y = kx^r,$$

r étant racine de l'équation

$$\varphi(r) = 3r^2(r-1)^2 - 2r(r-1)(3r+1) + 4r^2 = 0.$$

Cette équation du quatrième degré a pour racines

$$0, \quad 2, \quad \frac{3+2\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{3-2\sqrt{3}}{3}.$$

Comme l'intégrale générale est

$$y = h^2x^2 + hkx + k^2,$$

on voit que les valeurs $r = 0$, $r = 2$ donnent des intégrales *particulières* correspondant à $h = 0$, $k = 0$, tandis que les valeurs

$$r = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}, \qquad r = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}$$

donnent des intégrales *singulières*.

Ces conclusions peuvent être étendues aux équations homogènes d'ordre et de degré supérieur à coefficients constants.

18. Une équation homogène du second ordre de degré n, ne contenant y'' qu'au premier degré, c'est-à-dire une équation de la forme

$$(34) \qquad y''\Phi_{n-1}(y, y') = \Psi_n(y, y'),$$

où Φ_{n-1} et Ψ_n désignent des fonctions homogènes de y et y' de degrés n et $n - 1$, se ramène à une des équations étudiées dans la première partie, par la substitution

$$y = e^{\int u\,dx},$$

qui donne

$$(35) \qquad \frac{du}{dx} = \frac{\Psi_n(1, u) - u^2\Phi_{n-1}(1, u)}{\Phi_{n-1}(1, u)}.$$

On pourra réduire cette équation à la forme canonique indiquée dans la première Partie et reconnaître, comme nous l'avons vu, si elle est réductible à une équation à coefficients constants, par les substitutions employées dans cette première Partie.

Lorsque les coefficients de l'équation (34) sont constants, l'équation (35) donne x en u par une quadrature, puis l'équation

$$\log y = \int u\,dx$$

donne $\log y$ en u par une quadrature portant, comme la précédente, sur une fonction rationnelle. L'équation (34) admet alors des intégrales *particulières* de la forme ke^{rx}, r étant racine de l'équation

$$\Psi_n(1, r) - r^2\Phi_{n-1}(1, r) = 0.$$

On étendrait aisément à ce cas le théorème de la page 399.

Si l'on a une équation homogène du second ordre de degré $n > 2$ à coefficients constants, contenant y'' à un degré plus élevé que le premier, elle admet encore des solutions de la forme ke^{rx}, mais ces solutions peuvent être *singulières*. Ainsi l'équation

$$(y''y - y'^2)^2 + y^2(y'^2 - y^2) = 0$$

a pour intégrale générale

$$y = Ce^{\sin(x+\alpha)},$$

C et α désignant des constantes arbitraires, et pour intégrales *singulières*

$$y = ke^x, \qquad y = ke^{-x}.$$

19. Une classe importante d'équations homogènes se compose des équations dont l'intégrale générale peut se mettre sous la forme

$$(36) \qquad y = \frac{C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n}{G_1 v_1 + G_2 v_2 + \ldots + G_p v_p},$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_n, G_1, G_2, \ldots, G_p$ désignent des constantes *arbitraires*, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des fonctions linéairement indépendantes, $v_1, v_2, \ldots, v_p$ des fonctions linéairement indépendantes; cette expression de y est donc le quotient de l'intégrale générale d'une certaine équation différentielle linéaire homogène d'ordre n par l'intégrale générale d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre p. L'équation différentielle en y, obtenue par l'élimination des constantes

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots \quad C_n; \qquad G_1, \quad G_2, \quad \ldots, \quad G_p,$$

sera d'ordre $(n + p - 1)$, homogène et de degré n; la transformée en $\frac{1}{y}$ sera homogène et de degré p.

Pour le montrer, faisons $y = \frac{u}{v}$, l'expression (36) donnera

$$G_1 uv_1 + G_2 uv_2 + \ldots + G_p uv_p - C_1 vu_1 - C_2 vu_2 - \ldots - C_n vu_n = 0.$$

En différentiant cette équation $(n + p - 1)$ fois et éliminant les

constantes arbitraires entre les $(n+p)$ équations ainsi formées, on obtient l'équation différentielle cherchée

$$(37)\quad \begin{vmatrix} uv_1 & uv_2 & \dots & uv_p & vu_1 & vu_2 & \dots & vu_n \\ \frac{duv_1}{dx} & \frac{duv_2}{dx} & \dots & \frac{duv_p}{dx} & \frac{dvu_1}{dx} & \frac{dvu_2}{dx} & \dots & \frac{dvu_n}{dx} \\ \frac{d^2uv_1}{dx^2} & \frac{d^2uv_2}{dx^2} & \dots & \frac{d^2uv_p}{dx^2} & \frac{d^2vu_1}{dx^2} & \frac{d^2vu_2}{dx^2} & \dots & \frac{d^2vu_n}{dx^2} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \frac{d^{n+p-1}uv_1}{dx^{n+p-1}} & \frac{d^{n+p-1}uv_2}{dx^{n+p-1}} & \dots & \frac{d^{n+p-1}uv_p}{dx^{n+p-1}} & \frac{d^{n+p-1}vu_1}{dx^{n+p-1}} & \frac{d^{n+p-1}vu_2}{dx^{n+p-1}} & \dots & \frac{d^{n+p-1}vu_n}{dx^{n+p-1}} \end{vmatrix} = 0.$$

On reconnaît que cette équation est d'ordre $(n+p-1)$ par rapport à u et v; elle est homogène et de degré p par rapport à u et à ses dérivées, homogène et de degré n par rapport à v et à ses dérivées. Si l'on fait $v=1$, on a

$$u = y,$$

et si l'on fait $u=1$, on a

$$v = \frac{1}{y},$$

ce qui démontre la proposition énoncée ci-dessus relativement aux équations différentielles en y et en $\frac{1}{y}$.

Soient

$$(38)\quad \begin{cases} \frac{d^n u}{dx^n} = \alpha_1 \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \alpha_2 \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \dots + \alpha_{n-1}\frac{du}{dx} + \alpha_n u, \\ \frac{d^p v}{dx^p} = \beta_1 \frac{d^{p-1}v}{dx^{p-1}} + \beta_2 \frac{d^{p-2}v}{dx^{p-2}} + \dots + \beta_{p-1}\frac{dv}{dx} + \beta_p v \end{cases}$$

les équations différentielles linéaires admettant pour intégrales générales, la première

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_n u_n,$$

la seconde

$$G_1 v_1 + G_2 v_2 + \dots + G_p v_p.$$

L'équation (37) sera vérifiée si l'on y met pour u et v les fonctions les

plus générales vérifiant les équations (38); à l'aide de ces équations, on pourra, par différentiation, exprimer toutes les dérivées de u d'ordre supérieur à $(n-1)$ en fonction linéaire homogène de u et de ses $(n-1)$ premières dérivées; on pourra de même exprimer toutes les dérivées de v d'ordre supérieur à $(p-1)$ en fonction linéaire homogène de v et de ses $(p-1)$ premières dérivées. Ces expressions, portées dans l'équation (37), la vérifieront *identiquement*, quelles que soient

$$u, \quad \frac{du}{dx}, \quad \frac{d^2u}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}},$$

$$v, \quad \frac{dv}{dx}, \quad \frac{d^2v}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{p-1}v}{dx^{p-1}}.$$

De là un moyen de reconnaître si une équation différentielle d'ordre q, homogène et de degré p par rapport à y et à ses dérivées, admet une intégrale générale de la forme

$$y = \frac{C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n}{G_1 v_1 + G_2 v_2 + \ldots + G_p v_p}.$$

On aura d'abord

$$q = n + p - 1, \qquad n = q - (p - 1),$$

ce qui exige $q > p - 1$. Le nombre n étant ainsi déterminé, on fera $y = \frac{u}{v}$, et il faudra que l'équation transformée soit homogène et de degré n en v. Enfin il restera à essayer si l'on peut trouver des fonctions de x, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ telles, qu'en faisant

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \alpha_1 \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \alpha_2 \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \ldots + \alpha_n u,$$

$$\frac{d^p v}{dx^p} = \beta_1 \frac{d^{p-1}v}{dx^{p-1}} + \beta_2 \frac{d^{p-2}v}{dx^{p-2}} + \ldots + \beta_p v$$

l'équation en $\frac{u}{v}$ soit vérifiée identiquement, quelles que soient

$$u, \quad \frac{du}{dx}, \quad \frac{d^2u}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}},$$

$$v, \quad \frac{dv}{dx}, \quad \frac{d^2v}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{p-1}v}{dx^{p-1}}.$$

20. Supposons, par exemple, que l'on fasse

$$(39)\qquad \begin{gathered} n = 2, \qquad p = 2, \\ y = \frac{C_1 u_1 + C_2 u_2}{G_1 v_1 + G_2 v_2}, \end{gathered}$$

l'équation en $y = \frac{u}{v}$ sera alors du troisième ordre

$$(40)\qquad \begin{vmatrix} uv_1 & uv_2 & vu_1 & vu_2 \\ \frac{duv_1}{dx} & \frac{duv_2}{dx} & \frac{dvu_1}{dx} & \frac{dvu_2}{dx} \\ \frac{d^2uv_1}{dx^2} & \frac{d^2uv_2}{dx^2} & \frac{d^2vu_1}{dx^2} & \frac{d^2vu_2}{dx^2} \\ \frac{d^3uv_1}{dx^3} & \frac{d^3uv_2}{dx^3} & \frac{d^3vu_1}{dx^3} & \frac{d^3vu_2}{dx^3} \end{vmatrix} = 0,$$

homogène et du second degré par rapport à la fonction u et à ses dérivées, et par rapport à la fonction v et à ses dérivées.

Si l'on fait $v = 1$, $u = y$, on vérifie immédiatement que la plus haute dérivée y''' figure au premier degré dans l'équation différentielle, que le terme en $y'''y''$ a un coefficient nul, et que le terme en $y'''y'$ a pour coefficient

$$(v_2 v_1' - v_1 v_2')(u_2 u_1' - u_1 u_2'),$$

expression différente de zéro, car les fonctions v_1 et v_2 sont linéairement indépendantes, u_1 et u_2 également. L'équation différentielle est donc de la forme

$$(41)\qquad \begin{cases} y'''(ay' + by) + a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_4 y^2 \\ \qquad\qquad + 2b_1 y'y'' + 2b_2 y''y + 2b_3 yy' = 0. \end{cases}$$

La transformée en $\frac{1}{y}$, obtenue en faisant $u = 1$, doit être de la même forme. Si l'on a une équation du troisième ordre de la forme (41) telle que la transformée en $\frac{1}{y}$ soit de la même forme, pour voir si son inté-

grale générale est

$$(39) \qquad y = \frac{C_1 u_1 + C_2 u_2}{G_1 v_1 + G_2 v_2},$$

on posera $y = \frac{u}{v}$ et l'on cherchera à vérifier l'équation proposée en faisant

$$u'' = \alpha_1 u' + \alpha_2 u, \qquad u''' = (\alpha_1^2 + \alpha'_1 + \alpha_2) u' + (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha'_2) u,$$
$$v'' = \beta_1 v' + \beta_2 v, \qquad v''' = (\beta_1^2 + \beta'_1 + \beta_2) v' + (\beta_1 \beta_2 + \beta'_2) v.$$

Pour que l'intégrale générale soit de la forme (39), il faut et il suffit que, pour des déterminations convenables de α_1, α_2, β_1, β_2, les expressions précédentes de u'', u''', v'', v''' vérifient l'équation en $\frac{u}{v}$, quelles que soient u, v, u', v'.

On peut ramener les équations du troisième ordre et du second degré du type (41) à une forme réduite, dans laquelle b et b_1 seront nuls; les coefficients restants sont alors des *invariants absolus*. L'application de la méthode précédente fournirait les relations nécessaires et suffisantes qui lient ces invariants lorsque l'intégrale générale de l'équation est de la forme (39).

21. On pourrait plus généralement chercher un caractère distinctif des équations dont l'intégrale générale serait de la forme

$$y = \frac{C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n}{G_1 v_1 + G_2 v_2 + \ldots + G_p v_p},$$

les constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n, G_1, G_2, \ldots, G_p$ étant liées par m relations homogènes. Dans ce cas, l'intégrale générale ne dépendrait plus que de $(n + p - 1 - m)$ constantes arbitraires, et l'équation différentielle serait d'ordre $(n + p - 1 - m)$. Mais nous laissons pour une autre occasion cette étude, qui donnera une extension importante au théorème que nous avons eu l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences dans la séance du 19 novembre 1888.

Sur le développement de $\log\Gamma(a)$;

PAR M. T.-J. STIELTJES.

Le but principal de ce travail est de donner une nouvelle déduction de la formule (formule de Stirling)

$$\log\Gamma(a) = (a - \tfrac{1}{2})\log a - a + \tfrac{1}{2}\log(2\pi) + \frac{B_1}{1.2a} - \frac{B_2}{3.4a^3} + \frac{B_3}{5.6a^5} - \ldots$$

et de faire ressortir que le second membre représente asymptotiquement la valeur de $\log\Gamma(a)$ (dans un sens que nous préciserons plus loin), même dans le cas où la valeur de a est imaginaire, la partie réelle de a étant négative.

Les intégrales définies que l'on a jusqu'ici introduites dans cette théorie présentent toutes cette particularité qu'elles ne sont valables qu'en supposant la partie réelle de a positive et ne conviennent donc pas à notre but.

1. Il n'entre pas dans nos intentions de reprendre toute la théorie de la fonction Γ; mais, pour mieux caractériser notre point de vue, il semble convenable de donner une déduction rapide de toutes les formules dont nous aurons besoin.

Nous adopterons comme définition cette formule

$$(1) \qquad \Gamma(a) = \lim \frac{1.2\ldots(n-1)}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}\, n^a \qquad (n = \infty);$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a) \tag{2}$$

et

$$\Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(n) = 1.2.3\ldots(n-1).$$

Par conséquent, la formule (1) peut s'écrire

$$\Gamma(a) = \lim \frac{\Gamma(n)\,\Gamma(a)}{\Gamma(a+n)}\,n^a \qquad (n = \infty).$$

donc

$$\lim \frac{\Gamma(n+a)}{n^a\,\Gamma(n)} = 1 \qquad (n = \infty). \tag{3}$$

Une autre propriété qui découle immédiatement de la définition adoptée est celle-ci

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}. \tag{4}$$

Des formules (2) et (4) on déduit encore

$$\Gamma(a)\,\Gamma(-a) = \frac{-\pi}{a\sin(\pi a)},$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}+a)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}-a) = \frac{\pi}{\cos(\pi a)}.$$

Remplaçons ici a par ui, u étant réel; on en conclura

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{mod}\Gamma(ui) &= \sqrt{\frac{2\pi}{u(e^{\pi u}-e^{-\pi u})}}, \\ \operatorname{mod}\Gamma(\tfrac{1}{2}+ui) &= \sqrt{\frac{2\pi}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}}}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

2. Nous avons à considérer maintenant la fonction $\log\Gamma(a)$. C'est là une fonction qui n'est pas uniforme comme l'était $\Gamma(a)$. Mais il suffira de considérer une branche particulière de $\log\Gamma(a)$, et, pour la préciser, nous supposerons d'abord que $\log\Gamma(a)$ est réel lorsque a est

réel et positif. Ensuite nous limiterons la marche de la variable par la condition qu'elle ne traversera jamais la partie négative de l'axe des abscisses : nous avons ainsi une coupure de 0 à $-\infty$. De cette façon, $\log\Gamma(a)$ a une valeur unique et bien déterminée dans tout le plan, à l'exception des points de la coupure.

Pour ces points particuliers, $\log\Gamma(a)$ a deux valeurs selon que l'on arrive à un tel point par un chemin tracé dans la moitié supérieure ou inférieure du plan. L'axe des abscisses divise le plan en deux parties : nous désignons ici par moitié supérieure du plan cette partie où se trouve le point $+i$. La notation

$$\log\overset{+}{\Gamma}(a), \quad \log\overset{-}{\Gamma}(a)$$

servira à distinguer les deux valeurs de $\log\Gamma(a)$ aux bords de la coupure. Il est clair que la fonction $\log\Gamma(a)$, telle que nous venons de la définir, prend des valeurs conjuguées pour deux valeurs de a qui sont conjuguées. Par conséquent, la différence

$$\log\overset{+}{\Gamma}(a) - \log\overset{-}{\Gamma}(a)$$

sera purement imaginaire. Il est facile d'obtenir cette différence. En supposant

$$a = -n + \xi \qquad (0 < \xi < 1),$$

n étant entier et positif, la définition de $\Gamma(a)$ permet de conclure immédiatement

$$(6) \qquad \log\overset{+}{\Gamma}(a) - \log\overset{-}{\Gamma}(a) = -2\pi i \times n.$$

5. Considérons de même la fonction $\log a$ en limitant la marche de la variable comme dans le cas de $\log\Gamma(a)$: on a

$$\log\overset{+}{a} - \log\overset{-}{a} = +2\pi i,$$

donc

$$(7) \qquad (a - \overset{+}{\tfrac{1}{2}})\log a - (a - \overset{-}{\tfrac{1}{2}})\log a = -2\pi i\left[n + \tfrac{1}{2} - \xi\right].$$

Posons

$$\log\Gamma(a) - (a - \tfrac{1}{2})\log a = f(a),$$

on aura

$$(8) \qquad f(\overset{+}{a}) - f(\overset{-}{a}) = 2\pi i\left[\tfrac{1}{2} - \xi\right].$$

On voit que cette différence est indépendante de n et se reproduit ainsi périodiquement le long de la coupure.

Définissons maintenant une fonction d'une variable réelle x ainsi

$$(9) \qquad \begin{cases} P(x) = \tfrac{1}{2} - x & (0 < x < 1), \\ P(x+1) = P(x), \end{cases}$$

et posons

$$(10) \qquad J(a) = \int_0^x \frac{P(x)}{x+a}\,dx.$$

Nous définissons ainsi une fonction qui existe dans tout le plan, mais qui admet comme coupure la partie négative de l'axe des abscisses.

La différence des valeurs de $J(a)$ aux deux bords de la coupure s'obtient immédiatement à l'aide de la formule de M. Hermite (*Journal de Borchardt*, t. 91, p. 65)

$$(11) \qquad J(\overset{+}{a}) - J(\overset{-}{a}) = 2\pi i\left[\tfrac{1}{2} - \xi\right].$$

L'inspection des formules (8) et (11) conduit à considérer la différence $f(a) - J(a)$; posons donc

$$(12) \qquad \varphi(a) = \log\Gamma(a) - (a - \tfrac{1}{2})\log a - J(a);$$

on aura

$$\varphi(\overset{+}{a}) - \varphi(\overset{-}{a}) = 0,$$

c'est-à-dire que la fonction $\varphi(a)$ est uniforme dans le vrai sens du mot, sans limiter la marche de la variable. Il est facile à voir aussi que $\varphi(a)$ reste toujours finie et est, par conséquent, holomorphe dans tout le plan.

Mais il n'est pas nécessaire d'insister sur ce point, car nous allons voir qu'on obtient facilement l'expression explicite de cette fonction $\varphi(a)$.

4. Pour cela, il est nécessaire d'étudier d'abord la fonction $J(a)$. Si l'on écrit

$$J(a) = \int_0^1 \frac{P(x)}{x+a}\,dx + \int_1^2 \frac{P(x)}{x+a}\,dx + \int_2^3 \frac{P(x)}{x+a}\,dx + \ldots$$

on a, d'après la définition de $P(x)$,

$$(13) \qquad J(a) = \sum_0^\infty \int_0^1 \frac{\frac{1}{2} - x}{x+a+n}\,dx,$$

c'est-à-dire

$$(14) \qquad J(a) = \sum_0^\infty \left[(a+n+\tfrac{1}{2}) \log\left(\frac{a+n+1}{a+n}\right) - 1 \right],$$

et il est clair qu'on a

$$(15) \qquad J(a) - J(a+1) = (a+\tfrac{1}{2}) \log\left(\frac{a+1}{a}\right) - 1.$$

L'équation (14) peut donc s'écrire

$$J(a) = \sum_0^\infty [J(a+n) - J(a+n+1)],$$

donc

$$(16) \qquad \lim J(a+n) = 0 \qquad (n = \infty).$$

5. Les formules (15) et (16) nous permettent de reconnaître sans difficulté la nature de la fonction $\varphi(a)$. En effet, nous calculons d'abord

$$\begin{aligned} &\varphi(a+1) - \varphi(a) \\ &\quad = \log a - (a+\tfrac{1}{2}) \log(a+1) + (a-\tfrac{1}{2}) \log a - J(a+1) + J(a), \end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après (15),

$$\varphi(a+1) - \varphi(a) = -1.$$

Donc, si nous posons

$$\varphi(a) = -a + \psi(a),$$

c'est-à-dire

$$(17) \qquad \psi(a) = \log\Gamma(a) - (a - \tfrac{1}{2})\log a + a - \mathrm{J}(a),$$

la fonction $\psi(a)$ admettra la période 1

$$\psi(a+1) = \psi(a).$$

Soit n un entier positif, on aura

$$\begin{aligned}\psi(a+n) &- \psi(n)\\ &= \log\Gamma(a+n) - \log\Gamma(n) - (a+n-\tfrac{1}{2})\log(a+n)\\ &\quad + (n-\tfrac{1}{2})\log n + a - \mathrm{J}(a+n) + \mathrm{J}(n).\end{aligned}$$

Faisons croître indéfiniment l'entier n, à cause de la périodicité de la fonction ψ, le premier membre ne varie pas et reste égal à

$$\psi(a) - \psi(0).$$

Pour avoir la limite du second membre, il suffit de remarquer que, d'après (3),

$$\lim[\log\Gamma(a+n) - \log\Gamma(n) - a\log n] = 0 \qquad (n = \infty)$$

et, d'après (16),

$$\lim \mathrm{J}(a+n) = \lim \mathrm{J}(n) = 0 \qquad (n = \infty).$$

On obtient ainsi

$$\psi(a) - \psi(0) = 0.$$

La fonction ψ se réduit donc à une constante que nous désignerons par C, et nous obtenons ainsi

$$(18) \qquad \log\Gamma(a) = (a - \tfrac{1}{2})\log a - a + \mathrm{C} + \mathrm{J}(a).$$

6. Il nous reste à obtenir la valeur de la constante C.

Remarquons d'abord que la valeur de C est évidemment réelle. Cela

étant, remplaçons, dans la formule (18), a par ui, u étant réel et positif, et faisons croître indéfiniment u. C étant réel, on pourra négliger la partie purement imaginaire, et l'on aura

$$C = \lim. \text{ partie réelle de } [\log\Gamma(ui) - (ui - \tfrac{1}{2})\log(ui) - J(ui)].$$

Or nous verrons bientôt que

$$\lim J(ui) = 0, \tag{19}$$

et, d'autre part, on a

$$\text{p. r.}(ui - \tfrac{1}{2})\log(ui) = \text{p. r.}(ui - \tfrac{1}{2})\left(\log u + \frac{\pi}{2}i\right) = -\tfrac{1}{2}\log u - \frac{\pi u}{2}$$

et, d'après la formule (5),

$$\text{p. r.}\log\Gamma(ui) = \tfrac{1}{2}\log(2\pi) - \tfrac{1}{2}\log u - \tfrac{1}{2}\log(e^{\pi u} - e^{-\pi u});$$

donc

$$C = \lim \tfrac{1}{2}\log(2\pi) - \tfrac{1}{2}\log(1 - e^{-2\pi u}) = \tfrac{1}{2}\log(2\pi)$$

et, définitivement,

$$\log\Gamma(a) = (a - \tfrac{1}{2})\log a - a + \tfrac{1}{2}\log(2\pi) + J(a). \tag{20}$$

C'est la formule que nous voulions obtenir et qui servira de point de départ à notre déduction du développement de $\log\Gamma(a)$. Elle ne se distingue de la formule qu'on emploie ordinairement dans ce but que par la forme sous laquelle s'est présentée la fonction $J(a)$.

En effet, la formule (10)

$$J(a) = \int_0^\infty \frac{P(x)}{x + a}\,dx$$

est valable dans tout le plan et admet seulement comme coupure la partie négative de l'axe des abscisses, tandis que les formules de Binet

$$J(a) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-ax}}{x}\,dx, \tag{21}$$

$$J(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{a\,dx}{a^2 + x^2}\log\left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi x}}\right) \tag{22}$$

supposent essentiellement que la partie réelle de a soit positive.

Cette formule (10) est due à M. Bourguet qui l'a obtenue sous une forme légèrement différente dans un travail inédit, mais dont nous avons eu connaissance.

M. Bourguet obtient, en effet, une formule qui, après un changement de variable, peut s'écrire

$$J(a) = \sum_1^\infty \int_0^\infty \frac{dx}{x+a} \frac{\sin 2n\pi x}{n\pi},$$

et, comme on a, pour toute valeur réelle de x,

$$P(x) = \sum_1^\infty \frac{\sin 2n\pi x}{n\pi}, \tag{23}$$

la relation avec la formule (10) est évidente.

7. La formule (16) montre que $J(a)$ tend vers zéro lorsque a croît indéfiniment d'une certaine manière.

Il est important de généraliser ce résultat. Pour cela, reprenons la formule (13)

$$J(a) = \sum_0^\infty \int_0^1 \frac{\frac{1}{2} - x}{a+n+x} dx,$$

et remarquons que

$$\int_0^1 \frac{\frac{1}{2} - x}{a+n+x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2} - x}{a+n+x} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\frac{1}{2} - x}{a+n+x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2} - x}{a+n+x} dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2} - x}{a+n+1-x} dx;$$

donc

$$J(a) = \sum_0^\infty \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{a+n+x} - \frac{1}{a+n+1-x}\right) dx \tag{24}$$

ou

$$J(a) = \sum_0^\infty \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 dx}{(a+n+x)(a+n+1-x)}. \tag{25}$$

Supposons d'abord a réel et positif, $J(a)$ l'est aussi, et, à cause de

$$(a+n+x)(a+n+1-x)=(a+n)(a+n+1)+x(1-x),$$

on aura

$$J(a)<\sum_0^\infty\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2(\frac{1}{2}-x)^2\,dx}{(a+n)(a+n+1)}=\frac{1}{12}\sum_0^\infty\frac{1}{(a+n)(a+n+1)},$$

$$J(a)<\frac{1}{12a}.$$

Prenons maintenant, dans la formule (25),

$$a=Re^{i\theta},$$

R étant positif, et l'argument θ compris entre les limites $\pm\pi$. Il viendra évidemment

$$\operatorname{mod}J(Re^{i\theta})<\sum_0^\infty\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2(\frac{1}{2}-x)^2\,dx}{\operatorname{mod}(Re^{i\theta}+n+x)(Re^{i\theta}+n+1-x)}.$$

Nous remarquons ici que $n+x$ et $n+1-x$ sont réels et positifs. Or, b étant réel et positif, on a

$$\operatorname{mod}(Re^{i\theta}+b)=\sqrt{(R+b)^2\cos^2\tfrac{1}{2}\theta+(R-b)^2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta},$$

$$\operatorname{mod}(Re^{i\theta}+b)>(R+b)\cos\tfrac{1}{2}\theta,$$

donc

$$\operatorname{mod}J(Re^{i\theta})<\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\theta}\sum_0^\infty\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2(\frac{1}{2}-x)^2\,dx}{(R+n+x)(R+n+1-x)},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{mod}J(Re^{i\theta})<\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\theta}J(R)$$

et, à plus forte raison,

$$\operatorname{mod}J(Re^{i\theta})<\frac{1}{12R\cos^2\frac{1}{2}\theta}. \tag{26}$$

On voit par là que, lorsque a croît indéfiniment, $J(a)$ tend, en général, vers zéro. Il ne pourrait y avoir exception que dans le cas où l'argument θ tendrait en même temps vers la limite $+\pi$ ou vers $-\pi$. La formule (19) que nous avons admise provisoirement est aussi une conséquence immédiate de la limitation que nous venons d'obtenir.

8. Considérons maintenant le développement de $J(a)$ suivant les puissances descendantes de a. Si, dans la formule (10), nous remplaçons $P(x)$ par son développement en série trigonométrique (23), on aura

$$J(a) = \int_0^\infty \left(\sum_1^\infty \frac{\sin 2n\pi x}{2\pi} \right) \frac{dx}{x+a},$$

et, en intégrant par parties $2k-1$ ou $2k$ fois, on obtient

$$(27)\quad J(a) = \frac{B_1}{1.2a} - \frac{B_2}{3.4a^3} + \ldots + (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k-1)(2k)a^{2k-1}} + J_k(a),$$

le terme complémentaire $J_k(a)$ se présentant sous l'une des deux formes suivantes :

$$(28)\quad \begin{cases} J_k(a) = (-1)^k.1.2\ldots(2k-1) \displaystyle\int_0^\infty \left[\sum_1^\infty \frac{\cos 2n\pi x}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}} \right] \frac{dx}{(x+a)^{2k}}, \\ J_k(a) = (-1)^k.1.2\ldots(2k) \displaystyle\int_0^\infty \left[\sum_1^\infty \frac{\sin 2n\pi x}{2^{2k}(n\pi)^{2k+1}} \right] \frac{dx}{(x+a)^{2k+1}}. \end{cases}$$

Les nombres de Bernoulli s'introduisent dans la formule (27), par suite de la relation

$$1.2\ldots(2k) \sum_1^\infty \frac{1}{n^{2k}} = 2^{2k-1}\pi^{2k} B_k.$$

Posons

$$P_k(x) = (-1)^k.1.2\ldots(2k) \sum_1^\infty \frac{\sin 2n\pi x}{2^{2k}(n\pi)^{2k+1}},$$

on a évidemment

$$P_k(x+1) = P_k(x),$$

et la seconde des formules (28) peut s'écrire

$$(29)\qquad J_k(a) = \int_0^\infty \frac{P_k(x)}{(x+a)^{2k+1}}\,dx$$

ou encore

$$(30)\qquad J_k(a) = \int_0^1 P_k(x) \sum_0^\infty \frac{1}{(a+n+x)^{2k+1}}\,dx.$$

Si l'on remarque que

$$P_k(1-x) = -P_k(x),$$

on déduit facilement de (30) cette formule

$$(31)\quad J_k(a) = \int_0^1 P_k(x) \sum_0^\infty \left[\frac{1}{(a+n+x)^{2k+1}} - \frac{1}{(a+n+1-x)^{2k+1}}\right] dx.$$

Ces diverses formules présentent la plus grande analogie avec les formules (10), (13), (24). Il faut remarquer, en effet, que, dans l'intervalle $0 < x < 1$, $P_k(x)$ est un polynôme du degré $2k+1$ en x dont l'expression est bien connue.

Il est clair aussi que

$$J_k(a) - J_k(a+1) = \int_0^1 \frac{P_k(x)}{(a+x)^{2k+1}}\,dx;$$

la valeur explicite de cette différence se déduit des formules (27) et (15).

9. Nous allons chercher maintenant une limite supérieure pour le module de $J_k(Re^{i\theta})$. La première des formules (28) conduit facilement au but : il suffit de remarquer que

$$1.2\ldots(2k-1)\sum_1^\infty \frac{\cos 2n\pi x}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}} = \frac{1.2\ldots(2k-1)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}\sum_1^\infty \frac{1}{n^{2k}} = \frac{B_k}{2k}$$

et

$$\operatorname{mod}(x+Re^{i\theta}) > (x+R)\cos\tfrac{1}{2}\theta$$

pour obtenir immédiatement

$$(32)\qquad \operatorname{mod} J_k(Re^{i\theta}) < \frac{B_k}{(2k-1)2kR^{2k-1}}(\sec\tfrac{1}{2}\theta)^{2k}.$$

Pour obtenir une autre limitation, nous déduisons de la seconde des formules (28) par une intégration par parties

$$(33)\qquad J_k(a) = (-1)^k.1.2\ldots(2k+1)\int_0^\infty \sum_1^\infty \frac{1-\cos 2n\pi x}{2^{2k+1}(n\pi)^{2k+2}}\,\frac{dx}{(x+a)^{2k+2}};$$

d'où l'on conclut

$$\operatorname{mod} J_k(Re^{i\theta}) < \frac{1.2\ldots(2k+1)}{(\cos\frac{1}{2}\theta)^{2k+2}}\int_0^\infty \sum_1^\infty \frac{1-\cos 2n\pi x}{2^{2k+1}(n\pi)^{2k+2}}\,\frac{dx}{(x+R)^{2k+2}},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{mod} J_k(Re^{i\theta}) < \frac{1}{(\cos\frac{1}{2}\theta)^{2k+2}}\operatorname{mod} J_k(R).$$

Mais, lorsque a est réel et positif $= R$, la formule (33) montre que $J_k(R)$ a le signe de $(-1)^k$, et, à cause de

$$J_k(R) - J_{k+1}(R) = \frac{(-1)^k B_{k+1}}{(2k+1)(2k+2)}\,\frac{1}{R^{2k+1}},$$

$J_k(R)$ et $J_{k+1}(R)$ ayant signe contraire, il est clair que

$$\operatorname{mod} J_k(R) < \frac{B_{k+1}}{(2k+1)(2k+2)}\,\frac{1}{R^{2k+1}},$$

donc

$$(34)\qquad \operatorname{mod} J_k(Re^{i\theta}) < \frac{B_{k+1}}{(2k+1)(2k+2)}\,\frac{(\sec\frac{1}{2}\theta)^{2k+2}}{R^{2k+1}}.$$

Pour $k = 0$, on retrouve la limitation (26).

On voit que, R croissant indéfiniment tandis que l'argument θ reste constant, on a

$$\lim R^\alpha J_k(Re^{i\theta}) = 0,$$

tant que le nombre fixe α est inférieur à $2k+1$.

10. Soit $f(z)$ une fonction uniforme dans cette partie du plan où la partie réelle de z est $\geqq 0$. Supposons de plus que $f(z)$ n'ait ni pôles ni points singuliers essentiels dans ce domaine. Alors on aura, la partie réelle de a étant positive,

$$(35)\qquad f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)}{a-z}\,dz,$$

l'intégrale étant prise sur un contour C se composant de la partie de l'axe imaginaire de $-Ri$ à $+Ri$ et du demi-cercle obtenu en faisant varier θ de $+\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$ dans l'expression $z = Re^{i\theta}$. On doit supposer ici que le rayon R soit assez grand pour que le point a soit compris à l'intérieur de C. Le point $-a$ étant évidemment en dehors de C, on a

$$(36)\qquad 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)}{a+z}\,dz$$

et, par suite,

$$(37)\qquad f(a) = \frac{1}{\pi i}\int_{(C)} \frac{a f(z)}{a^2 - z^2}\,dz.$$

Supposons qu'on ait

$$(38)\quad \lim \int \operatorname{mod} \frac{f(z)}{z^2}\,dz = \lim \frac{1}{R^2}\int \operatorname{mod} f(z)\,dz = 0, \qquad R = \infty;$$

l'intégrale étant prise sur le demi-cercle de rayon R, la formule (37) donnera, en faisant croître indéfiniment R,

$$f(a) = \frac{1}{\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{a f(z)}{a^2 - z^2}\,dz = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a f(ui)}{a^2 + u^2}\,du.$$

la variable u parcourant les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$.

Dans le cas où la fonction $f(z)$ prend des valeurs conjuguées pour des valeurs conjuguées de la variable, cette formule se simplifie encore, et, en posant

$$(39)\qquad f(ui) = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}i,$$

on aura

$$(40) \qquad f(a) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{a\,\mathfrak{R}}{a^2+u^2}\,du.$$

Les formules (35) et (36) donnent encore, par soustraction,

$$f(a) = \frac{1}{\pi i}\int_{(C)} \frac{z f(z)}{a^2 - z^2}\,dz,$$

d'où l'on déduira par un raisonnement semblable

$$(41) \qquad f(a) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{u\,\mathfrak{J}}{a^2+u^2}\,du;$$

mais ici il faudra remplacer la condition (38) par celle-ci,

$$(42) \quad \lim \int \operatorname{mod} \frac{f(z)}{z}\,dz = \lim \frac{1}{R}\int \operatorname{mod} f(z)\,dz = 0, \qquad R = \infty,$$

l'intégrale étant prise encore sur le demi-cercle de rayon R.

Les formules (40) et (41) montrent comment on peut calculer (sous certaines conditions) la valeur de

$$f(a) \quad \text{partie réelle de} \quad a > 0,$$

en connaissant seulement soit la partie réelle, soit la partie purement imaginaire de $f(ai)$. Elles présentent une certaine analogie avec la formule qui permet de calculer la valeur d'une fonction u de deux variables réelles satisfaisant à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

en tout point à l'intérieur d'un cercle, si l'on connaît la valeur de u sur le contour du cercle.

La fonction $f(z) = \log z$ satisfait à la condition (38) : toutefois elle devient infinie pour $z = 0$; mais, l'intégrale qui figure dans la formule (40) conservant un sens, il est facile de voir que cette formule

reste applicable dans ce cas. Il en sera de même de la fonction $J(z)$, qui satisfait évidemment à la condition (38) d'après la limitation (26), la circonstance que, pour $z = 0$, $J(z)$ devient infini comme $\log z$ n'empêchant pas la formule (40) de rester applicable. A l'aide des formules (20) et (5), on trouve, dans ce cas,

$$A = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi a}}\right),$$

donc

$$J(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{a\,du}{a^2 + u^2}\log\left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi u}}\right).$$

C'est la formule de Binet, que nous avons rappelée plus haut (22).

11. Pour montrer une autre application de la formule (40), nous considérons la fonction

$$\Gamma(z + b)\Gamma(z + 1 - b),$$

b étant une quantité réelle, et nous remarquons que le module de cette fonction pour $z = iu$ (u étant réel) s'exprime par les fonctions élémentaires. En effet, ce module est égal à

$$\sqrt{\Gamma(b + iu)\Gamma(b - iu)\Gamma(1 - b + iu)\Gamma(1 - b - iu)};$$

mais

$$\Gamma(b + iu)\Gamma(1 - b - iu) = \frac{\pi}{\sin\pi(b + iu)},$$

$$\Gamma(b - iu)\Gamma(1 - b + iu) = \frac{\pi}{\sin\pi(b - iu)},$$

d'où l'on conclut la valeur du module

$$\frac{2\pi}{\sqrt{e^{2\pi u} + e^{-2\pi u} - 2\cos 2b\pi}}.$$

Cela étant, on s'assure facilement que l'on peut prendre dans la formule (40)

$$f(z) = \frac{1}{2}\log\frac{\Gamma(z + b)\Gamma(z + 1 - b)}{\Gamma(z)\Gamma(z)} - \frac{1}{2}\log z,$$

mais il est clair qu'il faudra supposer

$$0 \leqq b \leqq 1$$

pour que la fonction $f(z)$ reste finie tant que la partie réelle de z est positive. En effet, en introduisant la fonction $\Delta(z)$, on voit que $f(z)$ tend vers zéro lorsque z croît indéfiniment (la partie réelle de z restant toujours $\geqq 0$), en sorte que la condition (38) se trouve satisfaite. Un calcul facile donne d'ailleurs

$$\Delta = -\frac{1}{2}\log\frac{e^{2\pi u}+e^{-2\pi u}-2\cos 2b\pi}{(e^{\pi u}-e^{-\pi u})^2},$$

donc

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\log\frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+1-b)}{\Gamma(a)\Gamma(a)} \\ &\quad = \frac{1}{2}\log a - \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{a\,du}{a^2+u^2}\log\left[\frac{e^{2\pi u}+e^{-2\pi u}-2\cos 2b\pi}{(e^{\pi u}-e^{-\pi u})^2}\right] \\ &\qquad (0 \leqq b < 1). \end{aligned}\right.$$

12. Il est clair que la fonction

$$\log\frac{e^{2\pi u}+e^{-2\pi u}-2\cos 2b\pi}{(e^{\pi u}-e^{-\pi u})^2}$$

reste toujours positive; en écrivant donc

$$\frac{a}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} - \frac{u^2}{a^3} + \frac{u^4}{a^5} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{u^{2k-2}}{a^{2k-1}} + (-1)^k\frac{u^{2k}}{a^{2k-1}(a^2+u^2)}$$

et supposant a réel et positif, on obtiendra pour l'intégrale qui figure au second membre de (43) un développement suivant les puissances descendantes de a, qui jouira exactement des mêmes propriétés que la série de Stirling.

Nous écrivons ce développement ainsi

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{2}\log\frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+1-b)}{\Gamma(a)\Gamma(a)} &= \frac{1}{2}\log a + \frac{\varphi_1(b)}{a} + \frac{\varphi_3(b)}{3a^3} + \ldots \\ &\quad + \frac{\varphi_{2k-1}(b)}{(2k-1)a^{2k-1}} + R_k. \end{aligned}\right.$$

en posant

$$(45)\quad \frac{\varphi_{2n+1}(b)}{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi}\int_0^\infty u^{2n}\log\left[\frac{e^{2\pi u}+e^{-2\pi u}-2\cos 2b\pi}{(e^{\pi u}-e^{-\pi u})^2}\right]du.$$

La fonction $\varphi_{2n+1}(b)$ n'est autre chose que le polynôme de Bernoulli, qu'on peut définir, soit par le développement

$$\frac{e^{bx}-1}{e^x-1} = b+\varphi_1(b)x+\varphi_2(b)\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\varphi_k(b)\frac{x^k}{1.2\ldots k}+\ldots,$$

soit par la condition que, pour b entier et positif,

$$\varphi_k(b) = 1^k+2^k+\ldots+(b-1)^k.$$

La formule (45) montre clairement que $\varphi_{2n+1}(b)$ a constamment le signe de $(-1)^{n+1}$ dans l'intervalle $(0, 1)$, et est croissante dans l'intervalle $(0, \frac{1}{2})$, tandis que

$$\varphi_{2n+1}(1-b) = \varphi_{2n+1}(b).$$

C'est à M. Hermite qu'est due l'idée de faire dépendre les propriétés des polynômes de Bernoulli de leurs expressions par des intégrales définies. La formule qu'il a obtenue dans le tome 79 du *Journal de Borchardt*

$$\varphi_{2n+1}(b) = (-1)^{n+1}4\sin^2 b\pi\int_0^\infty\left(\frac{e^{\pi u}+e^{-\pi u}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}\right)\frac{u^{2n+1}\,du}{e^{2\pi u}+e^{-2\pi u}-2\cos 2b\pi}$$

se déduit de (45) par une intégration par parties.

Nous remarquons encore que la série infinie

$$\frac{\varphi_1(b)}{a}+\frac{\varphi_3(b)}{3a^3}+\frac{\varphi_5(b)}{5a^5}+\ldots$$

est divergente. C'est là une conséquence de ce fait, facile à démontrer, qu'en posant

$$c_n = \int_0^\infty u^n f(u)\,du,$$

$f(u)$ étant une fonction qui reste toujours positive, on a

$$\frac{c_2}{c_1} < \frac{c_3}{c_2} < \ldots < \frac{c_{n+1}}{c_n} < \ldots,$$

$$\lim \frac{c_{n+1}}{c_n} = +\infty.$$

13. Considérons maintenant la fonction

$$\frac{\Gamma(z+b)}{\Gamma(z+1-b)},$$

b étant une quantité réelle; nous remarquons que l'on obtient facilement (à un multiple de π près) l'argument de cette fonction dans le cas où $z = ui$. En effet, soit

$$\frac{\Gamma(b+iu)}{\Gamma(1-b+iu)} = re^{\alpha i}, \qquad \frac{\Gamma(b-iu)}{\Gamma(1-b-iu)} = re^{-\alpha i},$$

donc

$$\frac{\Gamma(b+iu)\,\Gamma(1-b-iu)}{\Gamma(b-iu)\,\Gamma(1-b+iu)} = e^{2\alpha i},$$

c'est-à-dire

$$e^{2\alpha i} = \frac{\sin\pi(b-iu)}{\sin\pi(b+iu)}.$$

On voit que α est égal à l'argument de

$$\sin\pi(b-iu) = \sin b\pi\left(\frac{e^{\pi u}+e^{-\pi u}}{2}\right) - i\cos b\pi\left(\frac{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}{2}\right).$$

Supposons $0 < b < 1$, en sorte que $\sin b\pi$ est positif, on aura

$$\alpha = k\pi - \operatorname{arctang}\left\{\frac{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}}\cot b\pi\right\},$$

l'arctang étant pris entre $\pm\frac{\pi}{2}$; l'entier k est nul si l'on veut que α s'annule en même temps que u.

Cela étant, posons

$$f(z) = \tfrac{1}{2}\log\frac{\Gamma(z+b)}{\Gamma(z+1-b)} - (b-\tfrac{1}{2})\log z$$

dans la formule (41). On voit facilement que sur le demi-cercle de rayon R le module de $f(z)$ devient très petit et s'annule pour $R=\infty$: donc la condition (42) se trouve satisfaite. Un calcul facile donne ensuite

$$2\mathfrak{B} = (\tfrac{1}{2}-b)\pi - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}}\cot b\pi\right),$$

ou,

$$\mathfrak{B} = \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left[\frac{e^{-2\pi u}\sin(2b\pi)}{1-e^{-2\pi u}\cos(2b\pi)}\right],$$

si l'on remarque que

$$(\tfrac{1}{2}-b)\pi = \operatorname{arc\,tang}(\cot b\pi),$$

et, par conséquent,

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\log\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+1-b)} &= (b-\tfrac{1}{2}\log a \\ &\quad - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{u\,du}{a^2+u^2}\operatorname{arc\,tang}\left[\frac{e^{-2\pi u}\sin(2b\pi)}{1-e^{-2\pi u}\cos(2b\pi)}\right] \\ &\quad (0 \leqq b \leqq 1). \end{aligned}\right.$$

L'arc tang qui figure dans cette formule ayant un signe constant, qui est celui de $\sin(2b\pi)$, on voit que l'on peut déduire encore de cette formule un développement en série qui jouira des mêmes propriétés que la série de Stirling

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\log\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+1-b)} &= (b-\tfrac{1}{2})\log a \\ &\quad - \frac{\varphi_2(b)}{2a^2} - \frac{\varphi_4(b)}{4a^4} - \ldots - \frac{\varphi_{2k}(b)}{2ka^{2k}} - R_k, \end{aligned}\right.$$

où

$$(48)\quad \frac{\varphi_{2n}(b)}{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{\pi}\int_0^\infty u^{2n-1}\operatorname{arc\,tang}\left[\frac{e^{-2\pi u}\sin(2b\pi)}{1-e^{-2\pi u}\cos(2b\pi)}\right]du.$$

Ici $\varphi_{2n}(b)$ est le polynôme de Bernoulli, tel que nous l'avons défini précédemment. On voit que

$$\varphi_{2n}(1-b) = -\varphi_{2n}(b),$$

et que dans l'intervalle $(0, \frac{1}{2})$, $\varphi_{2n}(b)$ a le signe de $(-1)^{n-1}$.

14. On peut se convaincre facilement que les fonctions φ qui figurent dans les formules (44), (45), (47) et (48) sont les polynômes de Bernoulli. En effet, la somme de (44) et (47) donne

$$(49) \qquad \log\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} = b\log a + \frac{\varphi_1(b)}{a} - \frac{\varphi_2(b)}{2a^2} + \frac{\varphi_3(b)}{3a^3} - \ldots.$$

Or supposons b entier et positif; on a

$$\log\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} = \log a(a+1)\ldots(a+b-1) = b\log a + \sum_1^{b-1}\log\left(1+\frac{n}{a}\right)$$

ou

$$\log\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} = b\log a + \sum_1^{b-1}\left\{\frac{n}{a} - \frac{n^2}{2a^2} + \frac{n^3}{3a^3} - \ldots\right\},$$

et l'on a précisément

$$\sum_1^{b-1} n^k = \varphi_k(b).$$

On voit aussi, par ce raisonnement, que, lorsque b est entier et positif, le développement (49) est convergent sous la condition

$$\operatorname{mod} a > b-1.$$

De même, si b est entier et négatif, on verra que ce développement est convergent sous la condition

$$\operatorname{mod} a > -b.$$

Mais, pour toute autre valeur de b, la série (49) est toujours divergente.

TABLE DES MATIÈRES.

QUATRIÈME SERIE. — TOME V.

Pages.

Sur la multiplication complexe dans les fonctions elliptiques et, en particulier, sur la multiplication par $\sqrt{-23}$; par M. *G.-H. Halphen* 5

Sur un théorème d'Electrodynamique. Note rectificative; par M. *P. Duhem*. 53

Sur le développement de l'expression

$$\{R^2 - 2Rr[\cos u \cos u' \cos(x - x') + \sin u \sin u' \cos(y - y')] + r^2\}^{-1};$$

par M. *T.-J. Stieltjes* 55

Sur le développement des fonctions implicites; par M. *F. Gomes Teixeira*. 67

Extrait d'une Lettre à M. *Hermite*; par M. *F. Caspary* 73

Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications à la Géométrie; par M. *G. Humbert* 81

Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables; par M. *Émile Picard* 135

Sur la détermination générale du volume engendré par un contour fermé gauche ou plan dans un mouvement quelconque; par M. *G. Kœnigs* ... 321

Georges Halphen; par M. *Camille Jordan* 345

Liste des travaux mathématiques de *Georges-Henri Halphen* 352

Sur les invariants de quelques équations différentielles; par M. *P. Appell*. 360

Sur le développement de $\log\Gamma(a)$; par M. *T.-J. Stieltjes* 425

FIN DU TOME V DE LA QUATRIÈME SÉRIE.

1805 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

QA
1
J684
sér.4
t.5
Physical &
Applied Sci.
Serials

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY